



AUFBAU UND TEST EINES HETERODYNEN
INTERFEROMETERS ZUR ZEITAUFGELÖSTEN
BESTIMMUNG DER ELEKTRONENDICHTE AN
EINEM PLASMASTRIPPER

Institut für Angewandte Physik
Universität Frankfurt

Masterarbeit

vorgelegt von

Philipp Christ

Version vom 2. November 2017

Erstprüfer: Dr. Marcus Iberler
Zweitprüfer: Prof. Dr. Joachim Jacoby

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist es gewesen, ein Interferometer aufzubauen und es für den Einsatz im Rahmen eines plasmadiagnostischen Verfahrens für die zeitaufgelöste Bestimmung der Elektronendichte vorzubereiten und zu testen.

Dazu ist ein Mach-Zehnder-Interferometer gewählt worden, das das heterodyne Messverfahren nutzt. Diese Wahl begründet sich darin, dass diese Art des Interferometers weit verbreitet eingesetzt wird und sich vielfach bewährt hat. Die wesentlichen Komponenten des Interferometers sind ein linear polarisierter Helium/Neon-Laser, der bei einer Wellenlänge von 632,8 nm emittiert, ein akusto-optischer Modulator, der eine Frequenzverschiebung von 80 MHz erzeugt, sowie ein I/Q-Demodulator, der die relevante interferometrische Phasenverschiebung ermittelt.

Da die vorgesehene Plasmaquelle nicht zur Verfügung gestanden hat, ist es vorrangig gewesen, ein geeignetes Testverfahren zu entwickeln. Das grundlegende Prinzip eines solchen Testverfahrens ist aus [AKON10b] beziehungsweise [AYK⁺13] übernommen und im Rahmen dieser Arbeit angepasst und weiterentwickelt worden. Dieses Testverfahren ist die Winkelbestimmung eines Glaskeils, da die Physik bei dem hier vorliegenden interferometrischen Messverfahren bei einem Plasma und einem Glaskeil dieselbe ist. Der Winkel des Glaskeils, den es zu reproduzieren gilt, beträgt $\alpha_0 = (3,883 \pm 0,017)^\circ$.

Im Laufe der Weiterentwicklung des Testverfahrens hat sich gezeigt, dass die Ausrichtung des Glaskeils relativ zum Laserstrahl von entscheidender Bedeutung ist. Die zumindest teilweise manuelle Keilausrichtung hat sich als ausreichend herausgestellt, dennoch wird in dieser Arbeit ein Korrekturschema für Ausrichtungsfehler vorgeschlagen.

Das Testverfahren kann sowohl statisch, als auch dynamisch durchgeführt werden. Es hat sich herausgestellt, dass das statische Verfahren ohne aufwendige Vibrationskompensationen ungeeignet, aber nicht bis ins Detail untersucht worden ist. Dort tritt der Keilwinkel in der Proportionalitätskonstante des Zusammenhangs zwischen Phasenverschiebung und Messstrecke, bezogen auf einen Referenzpunkt, in Erscheinung. Bei identischer Justage des Interferometers haben zwei Messungen der Referenzphase über Zeitintervalle von 45-50 s Ergebnisse geliefert, die untereinander eine Abweichung von 293 %, bezogen auf den kleineren Wert, besitzen. Dagegen hat das dynamische Verfahren, das als Fallexperiment verwirklicht worden und bei dem der Keilwinkel in der Öffnung der Fallparabel verborgen ist, vor allem in den Messreihen 3 und 4 sehr gute Ergebnisse hervorgebracht. Die Qualität dieser Messreihen beruht einerseits auf einer partiellen Anwendung des Korrekturschemas, indem zu den eigentlichen Messungen (0°-Stellung) eine Korrekturmessung (90°-Stellung)

vorgenommen worden ist, und andererseits sind die Messzeiten dort in der Regel mit 20 ms doppelt so groß wie bei den vorangegangenen Messreihen, sodass die Datenanpassung prinzipiell genauer wird. Bei Messreihe 4, die das beste Messergebnis geliefert hat, ist ein Keilwinkel von $\alpha = (3,8784 \pm 0,0022)^\circ$ bestimmt worden, der innerhalb der Fehler mit dem Erwartungswert übereinstimmt. Der relative Fehler liegt bei diesem Ergebnis bei 0,06 % und die Abweichung vom Erwartungswert beträgt 0,13 %. Der aus Messreihe 3 ermittelte Winkel, der innerhalb der Fehlergrenzen nicht mit dem Erwartungswert übereinstimmt, beträgt $\alpha = (3,8601 \pm 0,0010)^\circ$. Der relative Fehler ist mit 0,03 % geringer als bei Messreihe 4, aber die Abweichung zum Erwartungswert liegt bei 0,51 %. Da die exakte Ausrichtung des Laserstrahls bei Messreihe 1 völlig und bei Messreihe 2 teilweise unberücksichtigt geblieben ist, schwanken dort die ermittelten Keilwinkel zum Teil mit Abweichungen von 5-10 % um den Erwartungswert. Einzelne Ausreißer weisen sogar eine Abweichung von über 30 % auf.

Hinsichtlich der Präzision bei einer direkten Messung an einem Plasma ist aus den absoluten Fehlern der gemessenen Phasenverschiebungen mit einem Höchstwert von $\sigma_{\Delta\varphi} \approx 0,08$ rad eine Auflösungsgrenze der Elektronendichte von $n_{e,min} \approx 1,5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ abgeleitet worden. Zur weiteren erstrebenswerten Absenkung dieser Grenze, ohne dabei große Veränderungen des Interferometers zum Beispiel hinsichtlich der Wellenlänge vorzunehmen, um den Elektronendichtegradienten radial nach außen hin vermessen zu können, sind vermutlich ein präziseres Oszilloskop und eine rauschärmere Elektronik notwendig.

Des Weiteren werden Vorschläge angeboten, wie das beschriebene Interferometer grundlegend an das Plasmaexperiment angepasst und derart erweitert werden könnte, sodass zusätzlich zur Elektronendichte auch das Magnetfeld durch Ausnutzung des Faraday-Effekts ermittelt werden kann.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	I
1 Einleitung	1
2 Grundlagen der Plasmaphysik	2
2.1 Plasmaparameter	2
2.1.1 Plasmafrequenz	2
2.1.2 Debye-Abschirmung	4
2.1.3 Plasmaparameter N_D	6
2.2 Definition des Plasmas	6
3 Wellenoptik	7
3.1 Beschreibung elektromagnetischer Strahlung im Wellenbild	7
3.1.1 Mathematische Beschreibungen einer Lichtwelle im Vakuum	7
3.1.2 Polarisationszustände	12
3.2 Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit Materie	15
3.2.1 Der Brechungsindex	16
3.2.2 Wellengleichung in leitfähigen Medien	18
3.3 Wellen in Plasmen	20
3.3.1 Elektromagnetische Wellen in kalten Plasmen	20
3.3.2 Elektromagnetische Wellen in warmen Plasmen	22
3.4 Interpretation der Dispersionsrelationen	24
3.4.1 Transmission von elektromagnetischer Strahlung durch das Plasma	24
3.4.2 Grenzfall hoher Lichtfrequenzen	25
3.4.3 Faraday-Rotation	27
4 Interferenz	29
4.1 Zeitliche und räumliche Kohärenz	29
4.2 Mathematische Beschreibung des Interferenzphänomens	30
4.2.1 Zweistrahl-Interferenz bei gleicher Frequenz	30
4.2.2 Zweistrahl-Interferenz bei verschiedener Frequenz	31
4.2.3 Zweistrahl-Interferenz bei verschiedener Polarisation	32
4.3 Vorstellung zweier Interferometer	32
4.3.1 Das Michelson-Interferometer	33
4.3.2 Das Mach-Zehnder-Interferometer	34

5	Konzipierung eines heterodynem Interferometers	36
5.1	Schematische Darstellung des Interferometers	36
5.2	Übersicht über die Komponenten	37
5.2.1	Helium/Neon-Laser	37
5.2.2	Akusto-optischer Modulator	39
5.2.3	Photodetektor	41
5.2.4	I/Q-Demodulator	44
5.3	Beschreibung des Messprinzips	47
5.3.1	Heterodynes Interferometer	47
5.3.2	Vibrationen	52
5.4	Beschreibung des Testverfahrens	53
5.4.1	Statische Keilvermessung	53
5.4.2	Dynamische Keilvermessung	56
5.4.3	Weitere geometrische Überlegungen zur Keilausrichtung	58
6	Messergebnisse und Auswertung	62
6.1	Kalibrierungsverfahren des I/Q-Demodulators	62
6.2	Ergebnisse der statischen Keilvermessung	68
6.3	Ergebnisse der dynamischen Keilvermessung, Messreihe 1	69
6.3.1	Messung 1: Zeitverzögert, Messzeit 9 ms	69
6.3.2	Messung 2: Zeitverzögert, Messzeit 5 ms	72
6.3.3	Messung 3: Zeitverzögert, Messzeit 6 ms	73
6.3.4	Messung 4: Zeitverzögert, Messzeit 4,5 ms	74
6.4	Ergebnisse der dynamischen Keilvermessung, Messreihe 2	77
6.4.1	Messung 18: Synchronisiert, Messzeit 7,3 ms	77
6.4.2	Übersicht: Messungen 5 bis 25, synchronisiert	80
6.5	Ergebnisse der dynamischen Keilvermessung, Messreihe 3	81
6.5.1	Messung 30: Synchronisiert, 0°, Messzeit 20 ms	81
6.5.2	Messung 32: Synchronisiert, 90°, Messzeit 30 ms	84
6.5.3	Übersicht: Messungen 26 bis 35, synchronisiert, 0°/90°	87
6.6	Ergebnisse der dynamischen Keilvermessung, Messreihe 4	88
7	Diskussion und Ausblick	89
7.1	Vergleich und Bewertung der Messverfahren und Messergebnisse	89
7.1.1	Bewertung des statischen Messverfahrens	89
7.1.2	Bewertung des dynamischen Messverfahrens	89
7.1.3	Abschätzung der Auflösung des Interferometers bei Messung an einem Plasma	91

7.2	Probleme bei der Datenanpassung bei flachen Parabeln nahe dem Parabels- cheitel	93
7.3	Vorschläge zur Anpassung des Interferometers an den Theta-Pinch	96
7.3.1	Grundlegende Strahlführung	96
7.3.2	Vibrationskompensation	96
7.4	Erweiterungen des Interferometers	98
	Literaturverzeichnis	104
	Danksagungen	108

1 Einleitung

Die Elektronendichte ist neben der Elektronentemperatur einer der wichtigsten Parameter bei der Beschreibung von Plasmen. Sie ist relevant bei der Abgrenzung von Plasmazuständen, für die theoretische Beschreibung von internen Prozessen und bei praktischen Anwendungen, bei denen Plasmen zum Einsatz kommen.

Zur Messung der Elektronendichte werden verschiedenste Verfahren verwendet. Eines dieser Verfahren ist die *Spektroskopie*. Dabei wird zur Analyse die vom Plasma abgegebene Strahlung genutzt. Beispielsweise ist es möglich, abhängig vom jeweiligen Plasmazustand, mit der Linienbreite oder den absoluten Intensitäten von diskreten atomaren Übergängen Rückschlüsse auf die Elektronendichte zu ziehen. Für eine detailliertere Beschreibung siehe [Gri05, S. 258 ff.] oder [Kun09, S. 179 ff.].

Oftmals nachteilig bei spektroskopischen Verfahren ist die Ungewissheit über den Plasmazustand. Das heißt, der Plasmazustand wird von Elektronendichte und Elektronentemperatur festgelegt und bestimmt wiederum das korrekte Messverfahren für die Ermittlung dieser beiden Größen. Daher müssen im Vorfeld von spektroskopischen Messungen häufig Annahmen getroffen werden, die Unsicherheiten beherbergen können beziehungsweise nur Näherungen darstellen. Deshalb ist es sinnvoll, mehrere unabhängige physikalische Messverfahren einzusetzen, um die Ergebnisse untereinander bestätigen zu können. Eines dieser weiteren Messverfahren ist die *Interferometrie*.

Mit Orientierung an bereits bestehenden Interferometern, die an Plasmen eingesetzt worden sind, ist im Rahmen dieser Arbeit ein Interferometer aufgebaut und getestet worden, das zukünftig für eine zeitaufgelöste Bestimmung der Elektronendichte vorgesehen ist. Auch wenn bei den Tests kein Plasma verwendet worden ist, sind die besonderen Eigenschaften der späteren Plasmaquelle berücksichtigt worden.

Bei dieser Plasmaquelle handelt es sich um einen *Theta-Pinch*, der sich während dieser Arbeit im Umbau befunden hat und in veralteter Form in [TLBJ12] und [XJX⁺12] beschrieben ist. Daher sind bei der Wahl der Wellenlänge, mit der das Interferometer arbeitet, sowie der notwendigen Zeitauflösung, die Daten des alten Aufbaus verwendet und das Interferometer im Hinblick auf den neuen Aufbau des Pinchs, der mehr Energie in das Plasma einkoppeln und damit höhere Elektronendichten erzeugen soll als sein Vorgänger, mit ausreichenden Reserven ausgestattet worden.

2 Grundlagen der Plasmaphysik

2.1 Plasmaparameter

2.1.1 Plasmafrequenz

Die Zeitskala, mit der ein Plasma auf eine äußere Störung, wie zum Beispiel eine elektromagnetische Welle, reagieren kann, wird mit dem Parameter *Plasmafrequenz* ausgedrückt [Chr15, S. 6]. In nachfolgender Betrachtung wird mit einem einfachen Modell die Plasmafrequenz nach [Str11, S. 10 ff.] hergeleitet (vgl. [Chr15, S. 6 ff.]):

Befindet sich das Plasma in einem statischen, homogenen elektrischen Feld \vec{E} , entsteht auf Grund der freien Ladungsträger ein Polarisationsfeld im Plasmaminnern. Der Polarisationsvorgang hält solange an, bis das aufgebaute Polarisationsfeld das äußere elektrische Feld kompensiert. Am Ende dieses Vorgangs sind die Elektronen gegenüber den Ionen um eine Strecke δx verschoben, was in Abbildung (2.1) zu sehen ist:

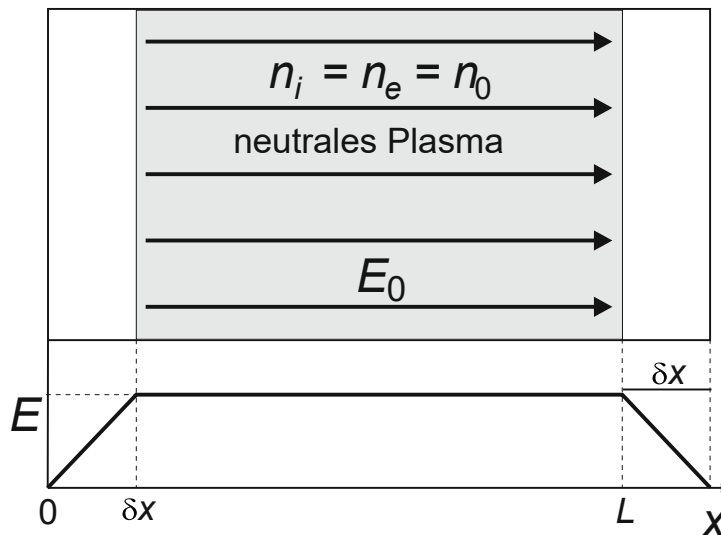


Abbildung 2.1: Verschiebung der Elektronen gegenüber den Ionen im Plasma durch ein externes elektrisches Feld [Str11, S. 11]

Bei Abschaltung des äußeren Felds übt das Polarisationsfeld eine Kraft auf die Elektronen und Ionen aus. Wegen der deutlich größeren Ionenmasse sind die Bewegungsamplituden der Elektronen deutlich größer, sodass die Ionen als statisch angesehen werden können.

Daher sind bei Anwendung dieser Modellbetrachtung die Elektronen von entscheidender Bedeutung, weil sie die Reaktionszeitskala vorgeben.

Für eine eindimensionale Herleitung wird die *Poisson-Gleichung* und das *Newton'sche Kraftgesetz* benötigt (vgl. [Chr15, S. 6 ff.]):

$$\Delta\Phi = -\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$m_e \frac{d^2\delta x}{dt^2} = -eE \quad (2.2)$$

Dabei ist Φ das elektrische Potential, e die Elementarladung, ρ die Ladungsdichte, n_i die Ionendichte, n_e die Elektronendichte, ϵ_0 die elektrische Feldkonstante und m_e die Elektronenmasse.

Wird als Grundlage ein neutrales Wasserstoffplasma ($n_e \approx n_i$) und damit $n_e \approx n_i \approx n$ verwendet, folgt aus Gleichung (2.1) und Integration über den gesamten Raumbereich:

$$E = \frac{en}{\epsilon_0} \delta x \quad (2.3)$$

Durch das Einsetzen von Gleichung (2.3) in (2.2) ergibt sich die Schwingungsgleichung eines harmonischen Oszillators

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} = -\frac{e^2n}{m_e\epsilon_0} \delta x \quad (2.4)$$

mit der Eigenfrequenz (Plasmafrequenz)

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2n}{m_e\epsilon_0}}. \quad (2.5)$$

Hier ist die Plasmafrequenz die Elektronenplasmafrequenz. Im Folgenden meint ω_p immer die Elektronenplasmafrequenz und wird nur zur Abgrenzung von der Ionenplasmafrequenz ω_{pi} mit ω_{pe} bezeichnet. Diese Vorgehensweise wird ebenfalls bei anderen physikalischen Größen angewandt.

2.1.2 Debye-Abschirmung

Da in einem Plasma freie Ladungsträger vorliegen, können dort existierende elektrische Felder abgeschirmt werden. Wird ein ruhendes Proton betrachtet, lässt sich die potentielle Energie $E_{pot}(r)$ eines Elektrons im *Coulombpotential* Φ des Protons angeben nach

$$E_{pot}(r) = -e\Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} . \quad (2.6)$$

Dabei ist r der Abstand der Ladungen zueinander, e die Elementarladung und ϵ_0 die elektrische Feldkonstante.

Wird im Folgenden der Einfachheit halber ein Wasserstoffplasma betrachtet, lässt sich die potentielle Energie eines Elektrons im Coulombpotential eines Protons nicht mehr durch Gleichung (2.6) beschreiben. Die Trajektorien anderer Elektronen werden durch elektrostatische Kräfte so beeinflusst, dass sie sich im statistischen Mittel näher am betrachteten Proton aufhalten. Durch diese dynamische Abschirmung kommt es zu einer Absenkung des Betrags der potentiellen Energie. Diese Abschirmung wird *Debye-Abschirmung* genannt [Chr15, S. 4].

Um das dazugehörige *Debye-Potential* herzuleiten, wird eine positive, ruhende, vom restlichen Plasma umgebene Ladung q_0 im Ursprung eines Koordinatensystems nach [Str11, S. 7 ff.] und [Spa90, S. 76] betrachtet (vgl. [Chr15, S. 4 ff.]):

Die Poisson-Gleichung lautet in diesem Fall

$$\epsilon_0 \Delta \Phi = -\rho = \frac{-q_0 \delta(r)}{4\pi r^2} + e(n_i - n_e) , \quad (2.7)$$

wobei ρ die Ladungsdichte, $\delta(r)$ die Dirac'sche Deltafunktion und n_i beziehungsweise n_e die Teilchendichten der Ionen (Protonen) und der Elektronen sind.

Des Weiteren liefert die *Maxwell-Boltzmann-Verteilung* im Phasenraum nach

$$n(r) = \int f(r, v) d^3v = \int n_0 f_M(v) \exp\left(\frac{-q\Phi}{T}\right) d^3v = n_0 \exp\left(\frac{-q\Phi}{T}\right) \quad (2.8)$$

den Zusammenhang zwischen Teilchendichte $n(r)$ und Potential Φ . Hier ist $f(r, v)$ die Verteilungsfunktion, n_0 die Dichte bei Potentialfreiheit, $f_M(v)$ die Geschwindigkeitsverteilung, q die Ladung der Teilchen und T die thermische Energie.

Gilt $q\Phi \ll T$, lässt sich Gleichung (2.8) im Argument der Exponentialfunktion entwickeln nach

$$n(r) \approx n_0 \left(1 - \frac{q\Phi}{T} \right). \quad (2.9)$$

Gleichung (2.7) wird damit zu

$$\epsilon_0 \Delta \Phi = \frac{-q_0 \delta(r)}{4\pi r^2} + e^2 n_0 \frac{2\Phi}{T}. \quad (2.10)$$

Die Lösung von Gleichung (2.10) ist

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (2.11)$$

mit der *Debye-Länge* $\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 T / 2e^2 n_0}$.

Abbildung (2.2) stellt die Debye-Abschirmung graphisch dar:

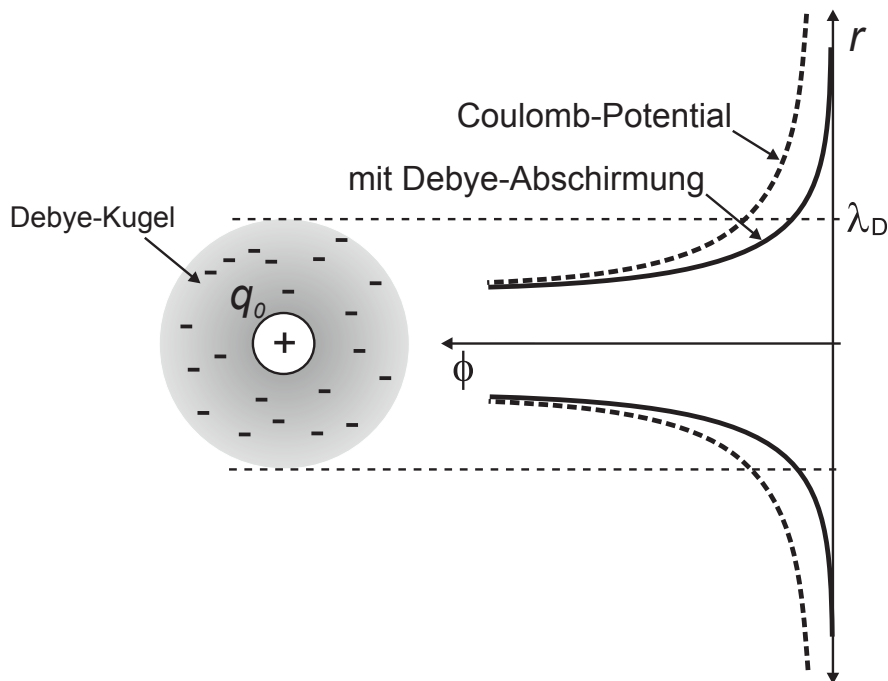


Abbildung 2.2: Debye-Abschirmung [Str11, S. 8]

2.1.3 Plasmaparameter N_D

Der Plasmaparameter N_D bezeichnet die Anzahl der Teilchen, die sich innerhalb der *Debye-Kugel* aufhalten. Er ist ein Maß dafür, wie viele Teilchen zur Debye-Abschirmung beitragen und ist mit der Teilchendichte n nach [Str11, S. 9] definiert als

$$N_D = \frac{4}{3}\pi n \lambda_D^3 . \quad (2.12)$$

2.2 Definition des Plasmas

Bei der Beschreibung von Materie auf makroskopischer Ebene lassen sich für gewöhnlich drei *Aggregatzustände* unterscheiden: *fest*, *flüssig* und *gasförmig*. Sie unterscheiden sich in der Art und Stärke der interatomaren beziehungsweise intermolekularen Wechselwirkung. Daneben existiert ein weiterer, vierter Aggregatzustand - das *Plasma*. Plasmen werden häufig als ionisierte Gase bezeichnet, müssen aber, obwohl hier die Grenze nicht scharf, sondern fließend ist, von neutralen Gasen abgegrenzt werden. Auf Grund freier Ladungsträger kommen zusätzliche, vor allem elektromagnetische, Effekte wie Coulombkräfte, Ströme, Leitfähigkeit und Magnetfelder, zum Tragen [Chr15, S. 3].

Mit den oben hergeleiteten Plasmaparametern lässt sich das Plasma definieren. Nach [Str11, S. 9 ff.] und [Che84, S. 11 ff.] muss Folgendes gelten:

$$\lambda_D \ll L \quad (2.13)$$

$$N_D \gg 1 \quad (2.14)$$

$$\omega_p \tau > 1 \quad (2.15)$$

Die ersten beiden Bedingungen definieren die Plasmaeigenschaften *Quasineutralität* und *kollektives Verhalten*. Das heißt, nur wenn die Ausdehnung des Plasmas L deutlich größer als die Debye-Länge ist und ausreichend viele Teilchen vorhanden sind, wird eine Ansammlung von geladenen Teilchen als Plasma bezeichnet. Die dritte Bedingung besagt, dass die Plasmafrequenz größer sein muss, als die inverse mittlere Stoßzeit τ mit neutralen Teilchen. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass elektromagnetische Kräfte beginnen, gegenüber hydrodynamischen Kräften das Verhalten der Teilchen zu dominieren.

3 Wellenoptik

3.1 Beschreibung elektromagnetischer Strahlung im Wellenbild

3.1.1 Mathematische Beschreibungen einer Lichtwelle im Vakuum

Grundlegend für die Beschreibung von Licht im Wellenbild sind die *Maxwell-Gleichungen*, die nachfolgend in differentieller Form dargestellt sind:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.4)$$

Dabei ist \vec{E} der elektrische Feldvektor, \vec{B} der Feldvektor der magnetischen Flussdichte, ϵ_0 die elektrische und μ_0 die magnetische Feldkonstante, ρ die Ladungsdichte und \vec{j} die Stromdichte.

Im Vakuum, unter Abwesenheit von Ladungen und Strömen und damit $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$, lassen sich die Gleichungen (3.1) - (3.4) derart ineinander umformen, dass eine Wellengleichung für das elektrische Feld \vec{E} entsteht [Dem06, S. 191]:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

Werden nur monochromatische harmonische Wellen mit der Kreisfrequenz ω als Lösung zugelassen, die die Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (3.6)$$

besitzen, dann lässt sich mit der Relation $\omega^2 = c^2 \vec{k}^2$ für den Wellenvektor \vec{k} die *Helmholtz-Gleichung* für den räumlichen Anteil angeben [Mes08, S. 43]:

$$(\Delta + \vec{k}^2) \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (3.7)$$

Die Lösungen von Gleichung (3.5) beziehungsweise (3.7) sind vielfältig und sollen im Folgenden dargestellt werden:

1. *Ebene Wellen*

Wird Gleichung (3.7) in kartesischen Koordinaten formuliert, das heißt

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad (3.8)$$

dann ist die charakteristische Lösung eine *ebene Welle* [Mes08, S. 45]:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_0 \vec{\epsilon} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (3.9)$$

Hierbei ist \mathcal{E}_0 die Amplitude und $\vec{\epsilon}$ gibt die Polarisationsrichtung an.

Ebene Wellen sind besonders grundlegende Lösungen der Wellengleichung und zeichnen sich dadurch aus, dass der Wellenvektor \vec{k} , der die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt, die Relation $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.}$ erfüllt. Dadurch werden unendlich ausgehende Ebenen mit $\Phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ als Phasenflächen definiert [Mes08, S. 45].

2. *Kugelwellen*

Kugelwellen, auch *sphärische Wellen* genannt, sind elektromagnetische Wellen, die von einer virtuellen Punktquelle ausgehen und deren Flächen gleicher Phase Kugelflächen sind [Lit04, S. 40]. Sie lassen sich aus der Helmholtz-Gleichung durch Formulierung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten gewinnen und besitzen folgende Gestalt (vgl. [Mes08, S. 46]):

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \vec{k}^2 \right) \vec{E}(r) = 0 \quad (3.10)$$

$$E(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_0 \frac{e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}}{|\vec{k} \cdot \vec{r}|} \quad (3.11)$$

In diesem Fall ist die Kugelwellenlösung (3.11) skalar notiert, obwohl sie eine vektorielle Größe ist und die Amplitude normalerweise den Richtungscharakter beinhaltet, was $\mathcal{E}_0 \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_0$ implizieren würde (vgl. [Nol11, S. 276]).

Abbildung (3.1) veranschaulicht die beiden Wellentypen (3.9) und (3.11):

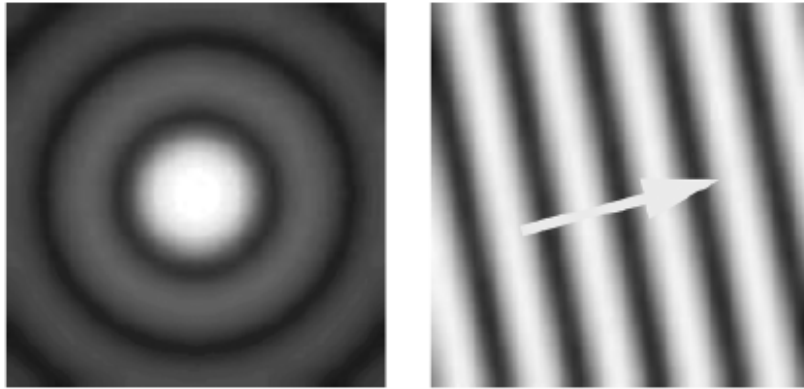


Abbildung 3.1: Momentaufnahme einer skalaren Kugelwelle (links) und einer ebenen Welle mit Ausbreitungsrichtung (rechts) [Mes08, S. 45]

3. Gauss-Strahlen

Eine weitere Lösung der Wellengleichung (3.5) ist der Gauss-Strahl. Dieser liefert eine viel bessere Beschreibung eines realen Lichtstrahls, sowie eines Laserstrahls, als die ebene Welle oder die Kugelwelle [LM11, S. 28]. Ein Strahl, so auch der Gauss-Strahl, stellt eine Verbindung zwischen einer ebenen Welle und einer Kugelwelle her und beinhaltet somit die Richtungscharakteristik und die Lokalisierung einer Lichtquelle im Raum [Rei13, S. 94].

Zur Beschreibung des Gauss-Strahls soll als Ausgangspunkt nochmals die Kugelwelle stehen, die ausschnittsweise in der Nähe der Ausbreitungsrichtung des Strahls, also „paraxial“, betrachtet wird (vgl. [Mes08, S. 48-49]):

Als longitudinale Komponente, die die Strahlausbreitungsrichtung repräsentiert, wird die z -Achse gewählt und die transversale Komponente wird mit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ bezeichnet. Der paraxiale Ausschnitt der Kugelwelle, der auch *Fresnel-Näherung* genannt und durch $\rho \ll z$ ausgedrückt wird, erlaubt es den räumlichen Anteil von Gleichung (3.11) mit der Näherung $r = \sqrt{z^2 + \rho^2} \approx z + \rho^2/2z$ und $\mathcal{A}(\vec{r})$ als ortsabhängiger Amplitude zu schreiben als

$$E(\vec{r}) = \frac{\mathcal{A}(\vec{r})}{|\vec{k} \cdot \vec{r}|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \approx \frac{\mathcal{A}(z, \rho)}{kz} \exp\left(i \frac{k\rho^2}{2z}\right) e^{ikz} . \quad (3.12)$$

Durch die Ersetzung $z \rightarrow q(z) = z - iz_0$ und nachfolgend

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{2}{kw^2(z)} \quad (3.13)$$

mit den neuen Größen z_0 , $R(z)$ und $w(z)$, lassen sich Real- und Imaginärteil im ersten Term der Exponentialfunktion von Gleichung (3.12) trennen:

$$\exp\left(i\frac{k\rho^2}{2z}\right) \rightarrow \exp\left(i\frac{k\rho^2}{2R(z)}\right) \exp\left(-\left(\frac{\rho}{w(z)}\right)^2\right) \quad (3.14)$$

Dabei beschreibt der erste Exponentialterm die Krümmung der Wellenfronten und der zweite die Einhüllende des Strahlprofils.

Nachfolgend soll auf besondere Größen des Gauss-Strahls, unter anderem auch auf die oben genannten Größen z_0 , $R(z)$ und $w(z)$, eingegangen werden, um die komplette Wellenfunktion des Gauss-Strahls angeben zu können [Mes08, S. 50 ff.]:

- **Rayleigh-Parameter**

Der Rayleigh-Parameter z_0 begrenzt mit $-z_0 \leq z \leq z_0$ die sogenannte *Rayleighzone*. Im Nahfeld, für $z \ll z_0$, propagiert der Gauss-Strahl nahezu wie eine ebene Welle und im Fernfeld, für $z \gg z_0$, verhält er sich wie eine Kugelwelle.

- **Wellenfrontradius**

Der Wellenfrontradius

$$R(z) = z \left(1 + (z_0/z)^2\right) \quad (3.15)$$

gibt an, wie sich der Radius der Wellenfronten entlang der Propagationsrichtung ändert. Innerhalb der Rayleighzone, für $z \ll z_0$, geht der Radius gegen unendlich, was der obigen Beschreibung einer ebenen Welle entspricht. Für $z \gg z_0$ lässt sich die Kugelwelleneigenschaft mit $R(z) \approx z$ erkennen.

- **Strahltaile**

Die Strahltaile

$$2w_0 = 2\sqrt{\lambda \cdot z_0/\pi} , \quad (3.16)$$

wobei λ die Wellenlänge des Laserlichts ist, ist der geringste Durchmesser des Gauss-Strahls, der bei $z = 0$ gewählt wird.

- **Strahlradius**

Der Strahlradius $w(z)$ ist folgendermaßen definiert:

$$w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right) \quad (3.17)$$

Im Nahfeld gilt dabei $w(z) \approx w_0 = \text{const.}$ und im Fernfeld verläuft er annähernd linear mit $w(z) \approx w_0 z / z_0$.

- **Divergenz**

Die Veränderung des Strahlradius entlang der Ausbreitungsrichtung lässt sich auch mit der Strahldivergenz beschreiben. Sie gibt den halben Öffnungswinkel des Laserstrahls im Fernfeld an:

$$\theta_{div} = \frac{w_0}{z_0} \quad (3.18)$$

Für den halben Öffnungswinkel entlang der z -Achse gilt für paraxiale Strahlen $\theta(z) = w(z)/z$.

- **Gouy-Phase**

Analog zu Gleichung (3.13) wäre auch die Ersetzung

$$\frac{i}{q(z)} = -\frac{1}{z_0} \frac{w_0}{w(z)} \exp(-i \arctan(z/z_0)) \quad (3.19)$$

möglich gewesen. Dabei ist die *Gouy-Phase* $\eta(z) = \arctan(z/z_0)$ eine Extra-Phase und repräsentiert eine Abweichung von der linearen Phasenentwicklung einer ebenen Welle entlang der z -Achse.

Mit den oben definierten Parametern lässt sich die sogenannte *Gauss'sche Grundmode* mit \mathcal{A}_0 als konstanter Amplitude wie folgt schreiben:

$$E(\rho, z) = \mathcal{A}_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-(\rho/w(z))^2} e^{ik\rho^2/2R(z)} e^{i(kz - \eta(z))} \quad (3.20)$$

Die messbare Intensitätsverteilung $I(\rho, z)$ ergibt sich mit der Lichtgeschwindigkeit c und $I(\rho, z) = c\epsilon_0 EE^*/2$ zu

$$I(\rho, z) = \frac{c\epsilon_0}{2} |\mathcal{A}_0|^2 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 e^{-2(\rho/w(z))^2} . \quad (3.21)$$

Abbildung (3.2) gibt mit den Identitäten $z_R = z_0$ und $\theta_{div} = \theta_0$ einen Überblick über die beschriebenen Eigenschaften eines Gauss-Strahls:

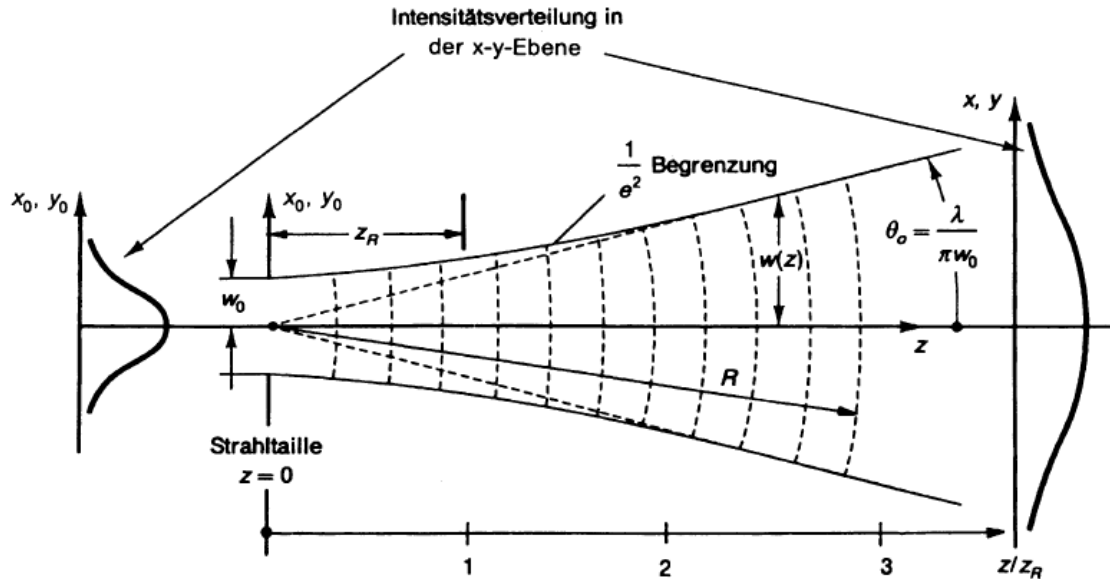


Abbildung 3.2: Gauss-Strahl inklusive Intensitätsverteilung [PPBS02, S. 657]

3.1.2 Polarisationszustände

Die Richtung des elektrischen Feldvektors \vec{E} einer elektromagnetischen Welle definiert die *Polarisation* [Dem06, S. 194]. Unpolarisiertes Licht, wie zum Beispiel das Sonnenlicht, zeichnet sich dadurch aus, dass der elektrische Feldvektor keine Vorzugsrichtung besitzt, sondern statistisch regellos ausgerichtet ist [HM05, S. 28]. Daneben existieren verschiedene Formen von polarisiertem Licht, die nachfolgend dargestellt werden sollen [Jac98, S. 299 ff.]:

In Anlehnung an Gleichung (3.9) lässt sich die Lichtwelle mit \vec{e}_1 als einem konstanten Vektor und E_1 als komplexer Amplitude schreiben als

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1 E_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} . \quad (3.22)$$

Daneben existiert eine zweite, linear unabhängige, Möglichkeit die Lichtwelle mit $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ anzugeben:

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_2 E_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.23)$$

Die allgemeinste Lösung besteht demnach aus einer Linearkombination von Gleichung (3.22) und (3.23):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (\vec{\epsilon}_1 E_1 + \vec{\epsilon}_2 E_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.24)$$

- **Linear polarisiertes Licht**

Da es sich bei den Amplituden E_1 und E_2 um komplexe Zahlen handelt, die sich in Polarkoordinaten mit Betrag und Phase als

$$E_{1/2} = |E_{1/2}| \cdot e^{i\theta_{1/2}} \quad (3.25)$$

darstellen lassen, liegt *linear* polarisiertes Licht genau dann vor, wenn die Phasendifferenz $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ist. Diese Art der Polarisation ist in Abbildung (3.3) gezeigt.

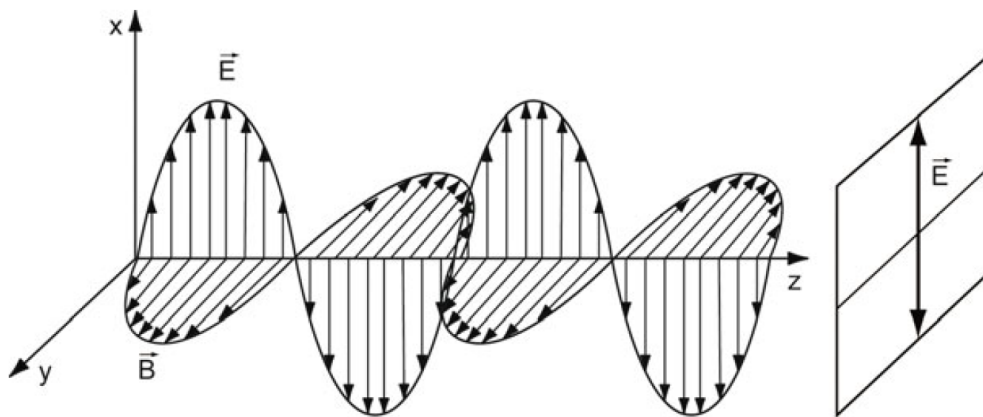


Abbildung 3.3: Linear polarisierte elektromagnetische Welle [LM11, S. 55]

- **Zirkular polarisiertes Licht**

Bei *zirkular* polarisiertem Licht liegt bei gleichen Beträgen $|E_1| = |E_2| = |E_0|$ eine Phasenverschiebung $\Delta\theta = \pi/2$ vor. Damit lässt sich Gleichung (3.24) schreiben als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 (i\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} . \quad (3.26)$$

Gleichung (3.26) kann auch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 (i\vec{\epsilon}_1 - \vec{\epsilon}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.27)$$

lauten, was einer Phasenverschiebung von $\Delta\theta = -\pi/2$ entspricht. Damit lassen sich, analog zu Gleichung (3.24), zwei linear unabhängige Basiszustände angeben, die *links zirkulare* oder *positiv helikale* Welle $\vec{\epsilon}_+$ und die *rechts zirkulare* oder *negativ helikale* Welle $\vec{\epsilon}_-$.

Da beide Basiszustandspaare äquivalent sind, können sie nach

$$\vec{\epsilon}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\vec{\epsilon}_1 \pm \vec{\epsilon}_2) \quad (3.28)$$

ineinander umgeformt werden.

Abbildung (3.4) veranschaulicht wird eine links-zirkular polarisierte elektromagnetische Welle.

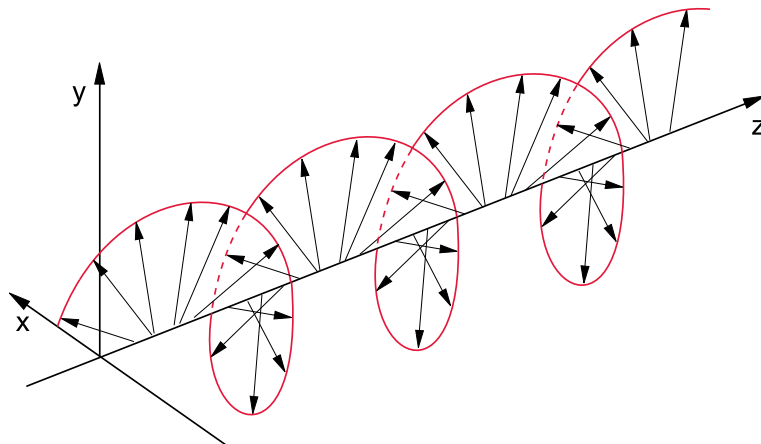


Abbildung 3.4: Links-zirkular polarisierte elektromagnetische Welle [Dem06, S. 194]

- **Elliptisch polarisiertes Licht**

Elliptisch polarisiertes Licht entsteht, falls die Phasenverschiebung $\Delta\theta \neq 0$ ist. Dabei können die Beträge der Amplituden identisch oder verschieden sein. Demnach sind linear und zirkular polarisiertes Licht Spezialfälle des elliptisch polarisierten Lichts, was somit der allgemeinste Polarisationszustand ist.

Abbildung (3.5) zeigt eine Projektion einer elliptisch polarisierten elektromagnetischen Welle in eine zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Ebene.

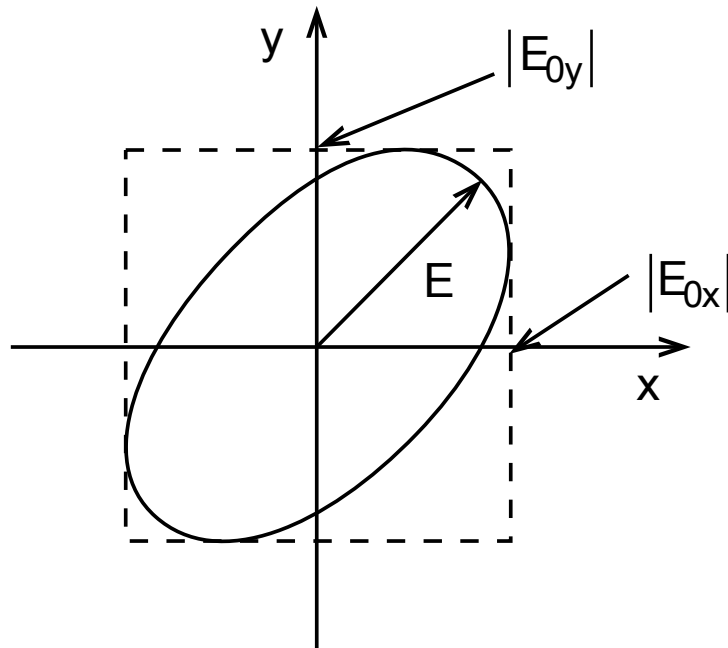


Abbildung 3.5: Projektion einer elliptisch polarisierten elektromagnetischen Welle [Nol11, S. 268]

3.2 Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit Materie

Die Ausbreitung von elektromagnetischer Strahlung in Materie macht eine Modifikation der Maxwell-Gleichungen notwendig:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (3.29)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.30)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.31)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_r \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (3.32)$$

Hier ist μ_r die Permeabilität des Materials und die dielektrische Verschiebungsdichte \vec{D} ist definiert nach

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.33)$$

mit ϵ_r als Dielektrizitätszahl des Materials und \vec{P} als dielektrischer Polarisation.

3.2.1 Der Brechungsindex

Der Brechungsindex N eines Mediums beschreibt, wie sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium v_{ph} gegenüber der Vakuumlichtgeschwindigkeit c verhält [Dem06, S. 219]:

$$N = \frac{c}{v_{ph}} \quad (3.34)$$

Die Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex $N = N(\lambda)$ wird *Dispersion* genannt.

Im Allgemeinen ist die Propagation von elektromagnetischer Strahlung durch ein transparentes Medium ein fortwährender Prozess von Streuung und Rückstreuung an den Atomen des Mediums. Die Streuprozesse führen zu einer phasenverschobenen Sekundärwelle, die sich mit der Primärwelle zur transmittierten Welle überlagert. Diese phasenverschobene Überlagerung führt zu einer modifizierten Ausbreitungsgeschwindigkeit [Hec02, S. 92]. Die Streuprozesse, sowie die Bildung der transmittierten Welle aus Primär- und Sekundärwellen, sind in den Abbildungen (3.6) und (3.7) gezeigt.

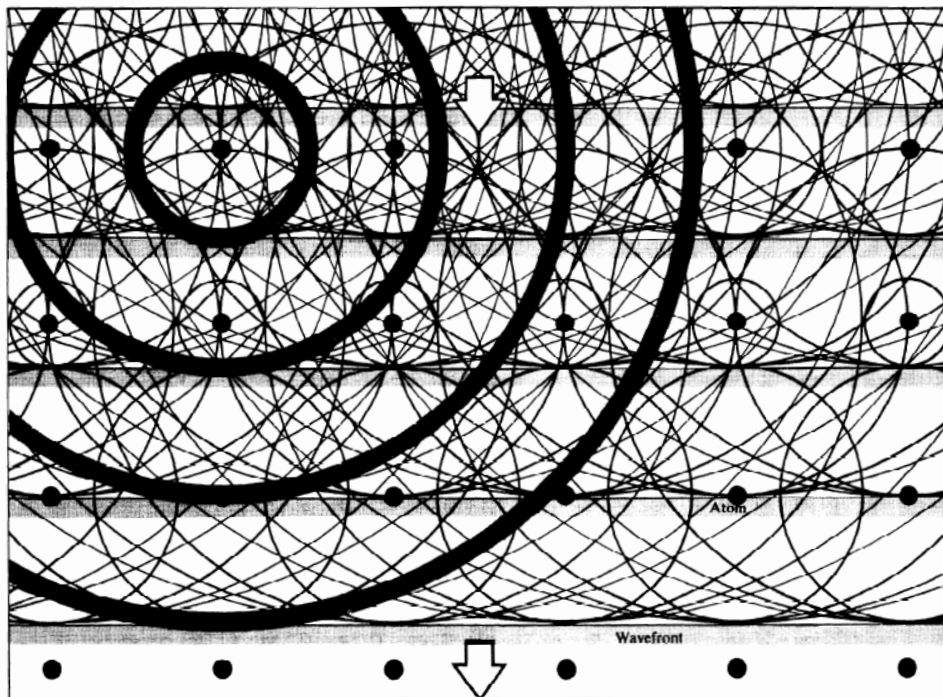


Abbildung 3.6: Streuprozesse im Medium [Hec02, S. 91]

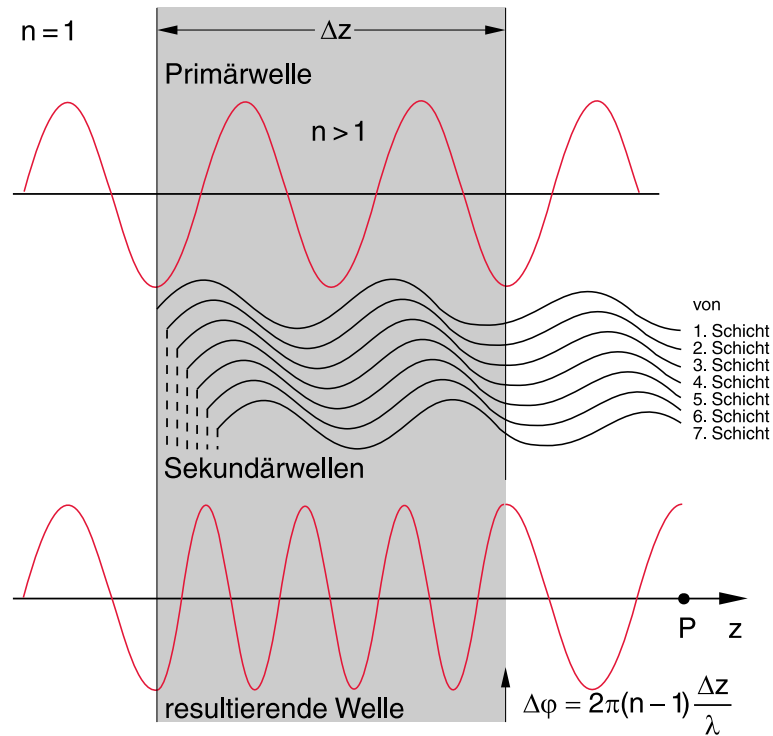


Abbildung 3.7: Bildung der transmittierten Welle aus Primär- und Sekundärwelle [Dem06, S. 220]

Bei einer mikroskopischen Betrachtung der im Medium schwingenden atomaren Dipole, die die Sekundärwelle generieren, und der Näherung einer gedämpften harmonischen Oszillation nach [Dem06, S. 220-223], ergibt sich eine Formel für den Brechungsindex, anhand derer dessen besondere Eigenschaften gezeigt werden können:

$$N = 1 + \frac{ne^2}{2\epsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma]} \quad (3.35)$$

Dabei ist n die Dipoldichte, e die Elementarladung, m die Elektronenmasse, ω_0 die Eigenfrequenz eines Dipols, ω die Kreisfrequenz der Welle und γ die Dämpfungskonstante.

Offensichtlich handelt es sich bei Gleichung (3.35) um eine komplexe Zahl der Form $N = N_r - iK$. Das heißt, dass Gleichung (3.34) nur den Realteil des Brechungsindex $\text{Re}(N)$ beinhaltet und daher lautet:

$$N_r = \frac{c}{v_{ph}} \quad (3.36)$$

Der Brechungsindex modifiziert wie folgt eine ebene Welle bei Ausbreitung in z -Richtung hinter einem Medium der Dicke Δz [Dem06, S. 223]:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{-\omega K \frac{\Delta z}{c}} \cdot e^{-i\omega(N_r-1)\frac{\Delta z}{c}} \cdot e^{i(\omega t - k_0 z)} \quad (3.37)$$

Der erste Exponentialterm gibt dabei die Absorption, also die Abnahme der Amplitude, an, der zweite Exponentialterm beschreibt eine Phasenänderung und der dritte Exponentialterm ist die gewöhnliche Phase der ebenen Welle.

Aus dem Term für die Phasenänderung wird deutlich, dass sich beim Durchgang durch ein Medium der Dicke Δz , die Phase der elektromagnetischen Welle verschiebt um

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} (N_r - 1) \Delta z . \quad (3.38)$$

Bei einem ortsabhängigen Realteil des Brechungsindex $N_r = N_r(z)$ lautet die Phasenverschiebung

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int (N_r - 1) dz = \frac{2\pi}{\lambda} \int (N_r - 1) dz , \quad (3.39)$$

wobei die Identität $\omega/c = 2\pi/\lambda$ verwendet worden ist.

3.2.2 Wellengleichung in leitfähigen Medien

Mit den modifizierten Maxwell-Gleichungen, wie sie eingangs von Kapitel 3.2 gezeigt sind, lässt sich, analog zur Wellengleichung im Vakuum, eine Wellengleichung in Materie aufstellen. Die häufig gemachte Unterscheidung zwischen verlustfreien und dispersiven Medien wird an dieser Stelle umgangen, indem Isolatoren als Grenzfall extrem schlechter Leiter betrachtet werden.

Für ein leitendes Medium gilt das *Ohm'sche Gesetz* $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, das besagt, dass die Stromdichte \vec{j} über die Leitfähigkeit σ direkt proportional zur elektrischen Feldstärke \vec{E} ist. Die Wellengleichung lautet damit [Leh10, S. 431]:

$$\Delta \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.40)$$

Dabei gilt $\mu = \mu_r \mu_0$ und $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Die Lösung ist ebenfalls eine ebene Welle nach

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (3.41)$$

mit der Dispersionsrelation

$$\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega = k^2 . \quad (3.42)$$

Durch die Beziehung $N = ck/\omega$ lässt sich für die weitere Herleitung nach [Wol16] die Dispersionsrelation auf den Brechungsindex umschreiben:

$$\mu_r \epsilon_r - i \frac{\mu \sigma c^2}{\omega} = N^2 \quad (3.43)$$

Durch Verwendung von $N = N_r - iK$ ergibt sich

$$N_r = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} \right]^{1/2} \quad (3.44)$$

und

$$K = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{\mu_r \sigma}{2\alpha} . \quad (3.45)$$

Im Grenzfall eines sehr schlechten Leiters, das heißt $\sigma \ll \omega\epsilon$, folgt

$$N_r \approx \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (3.46)$$

und damit

$$K \approx \frac{N_r \sigma}{c\epsilon\omega} . \quad (3.47)$$

Das bedeutet: In dieser Situation ist $N_r \gg K \approx 0$ und die Welle propagiert im Grenzfall verlustfrei mit der Phasengeschwindigkeit nach Gleichung (3.36). Das elektrische Feld bei Ausbreitung in z-Richtung lautet dann

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-i[\omega t - (N_r \omega/c) \cdot z]} . \quad (3.48)$$

Liegt dagegen ein sehr guter Leiter mit $\sigma \gg \omega\epsilon$ vor, folgt

$$N_r \approx c \sqrt{\frac{\mu \sigma}{2\omega}} \quad (3.49)$$

und damit

$$K \approx c \sqrt{\frac{\mu \sigma}{2\omega}} = N_r . \quad (3.50)$$

Hier ist $N_r \approx K$, das heißt der Imaginärteil ist gegenüber dem Realteil nicht vernachlässigbar und die Welle wird im Medium sehr rasch abgeschwächt. Das zugehörige elektrische Feld bei Ausbreitung in z-Richtung lautet:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-i[\omega t - (N_r \omega/c) \cdot z]} \cdot e^{-(K \cdot \omega/c) \cdot z} \quad (3.51)$$

3.3 Wellen in Plasmen

Dieses Kapitel soll die Verbindung der Wellenoptik zur Plasmaphysik herstellen. Für den interferometrischen Charakter dieser Arbeit sind insbesondere die *Dispersionsrelationen* zusammen mit den Brechungsindizes relevant. Diese fassen die Wechselwirkung der elektromagnetischen Strahlung mit Plasmen verschiedener Zustände zusammen und bilden damit die Grundlage für die interferometrische Auswertung. Im vorherigen Kapitel sind sie lediglich aus einem einfachen mikroskopischen Modell hergeleitet worden und sollen im Folgenden detaillierter betrachtet werden.

3.3.1 Elektromagnetische Wellen in kalten Plasmen

Ein *kaltes* Plasma ist dadurch definiert, dass die kinetischen Energien der Teilchen vernachlässigt werden, was damit zusammenhängend zu einer Vernachlässigung des Druckgradienten führt [Bit10, S. 400-401]. Nachfolgend wird die Dispersionsrelation in einem kalten Plasma bei Anwesenheit eines externen Magnetfeldes im Detail nach [Bit10, S. 413 ff.] und allgemein ergänzend nach [Bit10, S. 400 ff.] hergeleitet.

Zu Beginn stehen die *Langevin-Gleichung* für die Elektronenbewegung

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right) - m\nu\vec{u} \quad (3.52)$$

mit m als Elektronenmasse, \vec{u} als mittlere Elektronengeschwindigkeit, q als Ladung und ν als Stoßfrequenz, und die Maxwell-Gleichungen (3.1) - (3.4) mit der Ladungsdichte $\rho = -en + q_i n_i$ und Stromdichte $\vec{j} = -en\vec{u}$, wobei e die Elementarladung, q_i die Ionenladung und n beziehungsweise n_i die Elektronendichte und Ionendichte ist.

Durch deren Kombination und mit den linearen Näherungen $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t)$ und $\vec{n}(\vec{r}, t) = \vec{n}_0 + \vec{n}_1(\vec{r}, t)$ ergeben sich die Gleichungen

$$\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \frac{i\omega en_0}{\epsilon_0 c^2} \vec{u} \quad (3.53)$$

und

$$\left(1 + i \frac{\nu}{\omega} \right) \vec{u} + \frac{ie}{m\omega} \left(\vec{u} \times \vec{B}_0 \right) = - \frac{ie}{m\omega} \vec{E}. \quad (3.54)$$

Des Weiteren wird \vec{B}_0 in z-Richtung gewählt:

$$\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z \quad (3.55)$$

Mit θ wird der Winkel zwischen \vec{B}_0 und \vec{k} bezeichnet. Damit wird \vec{k} zu

$$\vec{k} = k \sin(\theta) \cdot \vec{e}_x + k \cos(\theta) \cdot \vec{e}_z . \quad (3.56)$$

Mit den Gleichungen (3.55) und (3.56) lässt sich Gleichung (3.53) mit dem Brechungsindex $N = kc/\omega$ in Matrixform angeben:

$$\begin{pmatrix} (1 - N^2 \cos^2 \theta) & 0 & N^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & (1 - N^2) & 0 \\ N^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & (1 - N^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{ien_0}{\epsilon_0 \omega} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Unter Berücksichtigung von $\vec{u} \times \vec{B}_0 = B_0 (u_y \cdot \vec{e}_x - u_x \cdot \vec{e}_y)$ und Invertierung ergibt sich ebenfalls eine Matrixform für Gleichung (3.54) nach

$$-\frac{ie}{m\omega U (U^2 - Y^2)} \begin{pmatrix} U^2 & -iUY & 0 \\ iUY & U^2 & 0 \\ 0 & 0 & (U^2 - Y^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} , \quad (3.58)$$

wobei im Folgenden $U = 1 + i\nu_e/\omega$, $Y = \Omega_{ce}/\omega$ und $X = \omega_{pe}^2/\omega^2$ mit Ω_{ce} als Elektronenzyklotronfrequenz und ω_{pe} als Elektronenplasmafrequenz benutzt wird.

Durch Einsetzen von Gleichung (3.57) in (3.58), der daraus folgenden Eliminierung des Geschwindigkeitsvektors und das Lösen des Gleichungssystems ergibt sich die *Appleton-Hartree-Gleichung* genannte Dispersionsrelation:

$$N^2 = 1 - \frac{X}{U - \frac{Y^2 \sin^2 \theta}{2(U-X)} \pm \left[\frac{Y^4 \sin^4 \theta}{4(U-X)^2} + Y^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}} \quad (3.59)$$

An dieser Stelle lassen sich zwei besondere Fälle unterscheiden:

1. $\vec{k} \perp \vec{B}$

In diesem Fall propagiert die elektromagnetische Welle senkrecht, das heißt im Winkel $\theta = \pi/2$, zum äußeren Magnetfeld durch das Plasma. Gleichung (3.59) vereinfacht sich damit zu

$$N^2 = 1 - \frac{X}{U - \frac{Y^2}{2(U-X)} \pm \frac{Y^2}{2(U-X)}} . \quad (3.60)$$

Hier lässt sich die Unterscheidung machen, ob der elektrische Feldvektor in die gleiche Richtung wie \vec{B}_0 zeigt (N_+) oder ob er senkrecht zu \vec{B}_0 ist (N_-).

N_+ wird als *ordinary wave* bezeichnet und liefert im Fall vernachlässigbarer Stöße:

$$N_+^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (3.61)$$

N_- wird als *extraordinary wave* bezeichnet und besitzt bei vernachlässigbarer Stoßfrequenz den Ausdruck

$$N_-^2 = \frac{(\omega^2 + \omega\Omega_{ce} - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega\Omega_{ce} - \omega_{pe}^2)}{\omega^2(\omega^2 - \Omega_{ce}^2 - \omega_{pe}^2)}. \quad (3.62)$$

2. $\vec{k} \parallel \vec{B}$

Falls sich die elektromagnetische Welle parallel zum äußeren Magnetfeld ausbreitet, ist der Winkel $\theta = 0$. Damit vereinfacht sich Gleichung (3.59) zu

$$N_{\pm}^2 = 1 - \frac{X}{U \pm Y}. \quad (3.63)$$

Auch hier erfolgt eine Unterscheidung bei Vernachlässigung der Stoßfrequenz. N_+ gehört zur links-zirkular polarisierten Welle

$$N_+^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \Omega_{ce})} \quad (3.64)$$

und N_- zur rechts-zirkular polarisierten Welle

$$N_-^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \Omega_{ce})}. \quad (3.65)$$

3.3.2 Elektromagnetische Wellen in warmen Plasmen

Die Herleitungen der Dispersionsrelationen in einem *warmen* Plasma sind analog zu Kapitel 3.3.1. Es wird lediglich von vollständiger Ionisation und von nicht vernachlässigbarer thermischer Bewegung und damit von einem nicht vernachlässigbaren Druckgradient ∇p ausgegangen [Bit10, S. 444]. Im Detail, neben anderen Anpassungen wie in [Bit10, S. 444 ff.] beschrieben, modifiziert sich Gleichung (3.52) zu

$$m_{\alpha} \frac{d\vec{u}_{\alpha}}{dt} = q_{\alpha} (\vec{E} + \vec{u}_{\alpha} \times \vec{B}) - \frac{1}{n_{\alpha}} \nabla p_{\alpha} - m_{\alpha} \nu_{\alpha\beta} (\vec{u}_{\alpha} - \vec{u}_{\beta}), \quad (3.66)$$

wobei n_{α} die Teilchendichte ist.

Wenn α die Elektronen meint, steht β für die Ionen und umgekehrt. Hinzu kommt die Adiabatangleichung

$$p_\alpha n_\alpha^{-\gamma} = \text{const.} \quad (3.67)$$

mit Adiabatenkoeffizient γ , wodurch sich mit der Gleichung eines idealen Gases mit der Temperatur T_α eine Gleichung für den Druckgradienten ergibt:

$$\nabla p_\alpha = \gamma k_B T_\alpha \nabla n_\alpha \quad (3.68)$$

Die weitere Herleitung folgt [Bit10, S. 470 ff.], wobei hier lediglich die Ergebnisse stehen sollen. Dabei impliziert der Index e die Elektronen und der Index i die Ionen:

Das Gleichungssystem für das elektrische Feld \vec{E} lässt sich schreiben als

$$\left\{ \left[1 + \frac{i\nu_{ei}}{\omega} (\mathcal{B}_e)^{-1} + \frac{i\nu_{ie}}{\omega} (\mathcal{B}_i)^{-1} \right] \cdot \mathcal{A} - X_e (\mathcal{B}_e)^{-1} - X_i (\mathcal{B}_i)^{-1} \right\} \cdot \vec{E} = \mathcal{C} \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.69)$$

mit der Dispersionsrelation

$$\det(\mathcal{C}) = 0. \quad (3.70)$$

Dabei ist \mathcal{A} die Matrix auf der linken Seite von Gleichung (3.57). Weiterhin gilt für \mathcal{B} :

$$\mathcal{B}_e = \begin{pmatrix} (1 - a^2 \sin^2 \theta) & iY_e & -a^2 \sin \theta \cos \theta \\ -iY_e & 1 & 0 \\ -a^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & (1 - a^2 \cos^2 \theta) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} (1 - b^2 \sin^2 \theta) & iY_i & -b^2 \sin \theta \cos \theta \\ -iY_i & 1 & 0 \\ -b^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & (1 - b^2 \cos^2 \theta) \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

Hier ist $a^2 = V_{se}^2 k^2 / \omega^2$ und $b^2 = V_{si}^2 k^2 / \omega^2$ mit V_s als Schallgeschwindigkeit.

Auch hier lassen sich die Fälle paralleler und senkrechter Propagation relativ zum äußeren Magnetfeld unterscheiden, wobei nur die transversalen Moden, die eine elektromagnetische Welle repräsentieren, interessant sind:

1. $k \perp \vec{B}$

Bei senkrechter Propagation zum äußeren Magnetfeld, Vernachlässigung der Stoßfrequenz und gleichzeitig $E_z \neq 0$, reduziert sich Gleichung (3.70) auf

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega^2}, \quad (3.73)$$

den *ordinary transverse mode*.

Daneben existiert bei Stoßvernachlässigung und $E_y \neq 0$ eine weitere Transversalwelle, der *partially transverse extraordinary mode*, deren detaillierte Ausführung auf Grund ihrer Komplexität hier ausgelassen wird.

2. $\vec{k} \parallel \vec{B}$

Hier zeigen sich analog zu 3.3.1 die links-zirkular polarisierte Welle

$$N_L^2 = 1 - \frac{X_i}{1 - Y_i^2} - \frac{X_e}{1 - Y_e^2} - \frac{X_i Y_i}{1 - Y_i^2} + \frac{X_e Y_e}{1 - Y_e^2} \quad (3.74)$$

und die rechts-zirkular polarisierte Welle

$$N_R^2 = 1 - \frac{X_i}{1 - Y_i^2} - \frac{X_e}{1 - Y_e^2} + \frac{X_i Y_i}{1 - Y_i^2} - \frac{X_e Y_e}{1 - Y_e^2} . \quad (3.75)$$

3.4 Interpretation der Dispersionsrelationen

3.4.1 Transmission von elektromagnetischer Strahlung durch das Plasma

Mit Kenntnis der Dispersionsrelationen und der Tatsache, dass es sich bei dem Brechungsindex um eine komplexe Zahl handelt, deren Realteil die Phasenänderung und deren Imaginärteil die Absorption beschreibt, lässt sich definieren, unter welchen Bedingungen elektromagnetische Strahlung in ein Plasma eindringen kann. Dies soll am Beispiel von Gleichung (3.61) gezeigt werden.

Gleichung (3.61) lautet

$$N_+^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} .$$

Falls $\omega_{pe} < \omega$ gilt, ist der Brechungsindex positiv reell, sodass das Plasma für die elektromagnetische Welle transparent ist und diese nach Gleichung (3.48) propagiert. Für den Fall $\omega_{pe} > \omega$ wird N_+ rein imaginär. Das hat zur Folge, dass sich die Welle nach Gleichung (3.51) mit $N_r = 0$ im Plasma nicht fortpflanzen, aber unter exponentieller Abschwächung eindringen kann, bevor sie reflektiert wird [Hec02, S. 128], [Dem06, S. 228].

Der Punkt $\omega = \omega_{pe}$ definiert den sogenannten *cut-off*, ab dem, zu niedrigen Frequenzen hin, die Reflektivität R des Plasmas eins wird [Rei13, S. 57]:

$$R = \frac{(N_r - 1)^2 + K^2}{(N_r + 1)^2 + K^2} = \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_{pe} \\ \frac{(N_r - 1)^2}{(N_r + 1)^2} & \omega > \omega_{pe} \end{cases} \quad (3.76)$$

Äquivalent zu Gleichung (3.61) lässt sich eine Bedingung über die Elektronendichte definieren. Für eine gegebene Frequenz ω der elektromagnetischen Strahlung kann die sogenannte *kritische Dichte* n_c angegeben werden. Für diese gilt:

$$\omega = \omega_p(n_c) \Leftrightarrow n_c = \frac{\omega^2 m_e \epsilon_0}{e^2} \quad (3.77)$$

Die kritische Dichte berechnet sich näherungsweise über die Wellenlänge λ nach

$$n_c \approx 1,115 \cdot 10^{15} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \text{ m}^{-3} . \quad (3.78)$$

Die Verwendung der kritischen Dichte ist eher von praktischem Nutzen, als dass sie neue Erkenntnisse mit sich bringt, da die Elektronendichte gegenüber der Plasmafrequenz ein anschaulicherer Parameter ist. Aus Gleichung (3.77) folgt für Gleichung (3.61)

$$N_+^2 = 1 - \frac{n_e}{n_c} . \quad (3.79)$$

3.4.2 Grenzfall hoher Lichtfrequenzen

In den Dispersionsrelationen existieren drei charakteristische Frequenzen, die für weitere Betrachtungen in das Verhältnis zur Laserlichtfrequenz ω gesetzt werden können: die Stoßfrequenz ν , die für die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen steht, die Zyklotronfrequenz Ω_c , die die Umlauffrequenz eines geladenen Teilchens unter Anwesenheit eines Magnetfelds angibt, und die Plasmafrequenz ω_p , die für die Zeitskala steht, mit der das Plasma auf äußere Störungen reagieren kann.

- **Stoßfrequenz**

Die Stoßfrequenz hängt im Wesentlichen von der Elektronentemperatur T_e und der Elektronendichte n_e ab. Für die Elektronen-Stoßfrequenz ν_e gilt nach [Hor91, S. 41]:

$$\nu_e = \frac{n_e}{(k_B T_e)^{3/2}} \frac{Z \pi^{3/2} e^4 \ln \Lambda}{m_e^{1/2} 2^{5/2} \gamma_e(Z)} \quad (3.80)$$

Dabei ist Z die Kernladungszahl, k_B die Boltzmann-Konstante, e die Elementarladung, m_e die Elektronenmasse und $\gamma_e(Z)$ ein Korrekturfaktor, der neben Elektronen-

Ion Stößen auch Elektron-Elektron Stöße berücksichtigt. Weiterhin ist Λ definiert nach

$$\Lambda = \frac{3k_B T_e}{Ze^3} \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi n_e}}. \quad (3.81)$$

Bei einer Plasmatemperatur $k_B T_e = 3 \text{ eV}$ und einer Elektronendichte $n_e = 10^{25} \text{ m}^{-3}$ liegt die Elektronen-Stoßfrequenz mit $\gamma_e(1) = 0,5$ bei $\nu_e \approx 7,0 \text{ THz}^1$.

- **Zyklotronfrequenz**

Die Zyklotronfrequenz Ω_c eines Teilchens der Ladung q und der Masse m in einem Magnetfeld der Flussdichte $B = |\vec{B}|$ ist definiert nach

$$\Omega_c = \frac{q \cdot B}{m}. \quad (3.82)$$

In einem Magnetfeld von $B = 1 \text{ T}$ beträgt die Zyklotronfrequenz für ein Elektron $\Omega_{ce} \approx 2\pi \cdot 28 \text{ GHz}$. Für ein Proton ist sie auf Grund des Masseverhältnisses zum Elektron um den Faktor 1836 kleiner.

- **Plasmafrequenz**

Die Plasmafrequenz ist nach Gleichung (2.5) gegeben. Zur Abschätzung muss daher die zu erwartende Elektronendichte bekannt sein. Für eine Elektronendichte von $n_e = 10^{25} \text{ m}^{-3}$ liegt die Plasmafrequenz bei $\omega_p \approx 2\pi \cdot 28 \text{ THz}$.

Je nachdem, in welchem Bereich des elektromagnetischen Spektrums die Lichtwelle liegt, die mit dem Plasma wechselwirkt, können besondere Vereinfachungen in den Dispersionsrelationen auftreten, insbesondere wenn die drei oben genannten Frequenzen gegenüber der Frequenz des Lichts klein sind. Bei der Verwendung von sichtbarem Licht, das zum Beispiel für eine Wellenlänge von $\lambda = 633 \text{ nm}$ eine Frequenz von $\omega \approx 2\pi \cdot 474 \text{ THz}$ besitzt, können Stoßfrequenz und insbesondere die Zyklotronfrequenz vernachlässigt werden. Das heißt, für die Größen U und Y aus Kapitel 3.3.1 gilt $U \approx 1$, sowie $Y \approx 0$. Damit konvergieren alle Dispersionsrelationen aus Kapitel 3.3.1 und 3.3.2 gegen Gleichung (3.61).

Weiterhin lässt sich, mit Betrachtung der Plasmafrequenz unter der Bedingung $\omega \gg \omega_p$, Gleichung (3.61) entwickeln nach

$$N_+ = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}. \quad (3.83)$$

¹Es ist nicht möglich gewesen, lückenlos nachzuvollziehen, ob es sich bei der Größe ν_e in [Hor91, S. 41] um eine Frequenz oder Kreisfrequenz handelt. Daher besteht die Möglichkeit, dass $\nu_e = 2\pi \cdot 1,1 \text{ THz}$ gilt.

Für Gleichung (3.39) folgt mit Gleichung (3.79), Gleichung (3.83), $N_r = N_+$ und $dz = dl$:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \int (N_r - 1) dz \approx -\frac{\pi}{\lambda n_c} \int n_e dl \quad (3.84)$$

Das heißt, dass die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ direkt proportional zum Linienintegral der Elektronendichte $\int n_e dl$ ist.

3.4.3 Faraday-Rotation

Für den Fall, dass sich linear polarisiertes Licht parallel zum Magnetfeld in einem Plasma ausbreitet, kommt es zu einer Drehung der Polarisationsrichtung. Dieser Effekt heißt *Faraday-Rotation*.

Linear polarisiertes Licht besteht aus einer Superposition zweier entgegengläufiger, zirkular polarisierter Wellen (vgl. Kapitel 3.1.2) nach

$$\vec{E} = |E_1| \cdot \vec{\epsilon}_1 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = |E'_1| \cdot (\vec{\epsilon}_+ + \vec{\epsilon}_-) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} . \quad (3.85)$$

Hierbei ist die Amplitude E_2 aus Gleichung (3.24) und die Phase θ_1 aus Gleichung (3.25) zu Null gewählt worden.

Es können Phasen δ_+ und δ_- eingeführt werden, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf Grund der nicht festgelegten Richtung von $\vec{\epsilon}_1$ null sind, und es lässt sich schreiben:

$$\vec{\epsilon}_+ + \vec{\epsilon}_- = \vec{\epsilon}_+ \cdot e^{i\delta_+} + \vec{\epsilon}_- \cdot e^{i\delta_-} \quad (3.86)$$

Gleichung (3.86) zeigt, dass die beiden gegenläufig polarisierten Wellen in Phase sind, da $\delta_+ = \delta_-$ gilt. Falls sich die Polarisationsrichtung um den Winkel θ ändern soll, muss δ_+ nach $\delta_+ - \delta_- = 2\theta$ aus der Phase geschoben werden.

Die Drehung der Polarisationsrichtung bei Ausbreitung von Licht durch ein Plasma parallel zum Magnetfeld lässt sich direkt an den Gleichungen (3.64), (3.65), sowie (3.74) und (3.75) sehen. Sie zeigen, dass in dieser Situation der Brechungsindex für verschieden helikale Wellen unterschiedlich ist. Am Beispiel der Gleichungen (3.64) und (3.65) soll die Faraday-Rotation hergeleitet werden:

Mit Gleichung (3.39) folgt für den Rotationswinkel

$$\theta = \frac{\omega}{2c} \int (N_+ - N_-) dl . \quad (3.87)$$

Mit der Bedingung

$$N_{\pm} \approx 1 - \frac{X}{2(U \pm Y)} \quad (3.88)$$

gilt bei Vernachlässigung der Stoßfrequenz:

$$\theta \approx \frac{1}{4\omega c} \int \left(\frac{\omega_{pe}^2}{1 - \frac{\Omega_{ce}}{\omega}} - \frac{\omega_{pe}^2}{1 + \frac{\Omega_{ce}}{\omega}} \right) dl = \frac{1}{4\omega c} \int \left(\frac{2\omega_{pe}^2 \Omega_{ce}/\omega}{1 - \Omega_{ce}^2/\omega^2} \right) dl \quad (3.89)$$

Unter Benutzung von $\omega \gg \Omega_{ce}$ mit $\Omega_{ce} = eB/m_e$, der Plasmafrequenz nach Gleichung (2.5) und Gleichung (3.77) folgt

$$\theta \approx \frac{e}{2cm_en_c} \int n_e B_{\parallel} dl . \quad (3.90)$$

Dabei ist B_{\parallel} der Anteil von \vec{B} , der entlang des Integrationswegs $d\vec{l}$ zeigt, das heißt:

$$d\vec{l} = dl \cdot \vec{e}_{\parallel} \quad \vec{B} = B_{\parallel} \cdot \vec{e}_{\parallel} + B_{\perp} \cdot \vec{e}_{\perp} \quad \vec{e}_{\parallel} \cdot \vec{e}_{\perp} = 0 \quad (3.91)$$

Der Faraday-Effekt tritt nicht nur bei Plasmen auf, sondern auch bei anderen Medien, zum Beispiel bei Glas oder Wasser, wenn sie Magnetfeldern ausgesetzt sind. Auch in Luft tritt dieser Effekt ein, erzeugt allerdings, wie bei neutralen Gasen im Allgemeinen, im Verhältnis nur sehr kleine Drehwinkel (vgl. [Hec02, S. 367]). Abbildung (3.8) veranschaulicht den Faraday-Effekt. Dort wird ein Medium von einem magnetischen Wechselfeld durchflutet, um die Drehung der Polarisationsrichtung modulieren zu können.

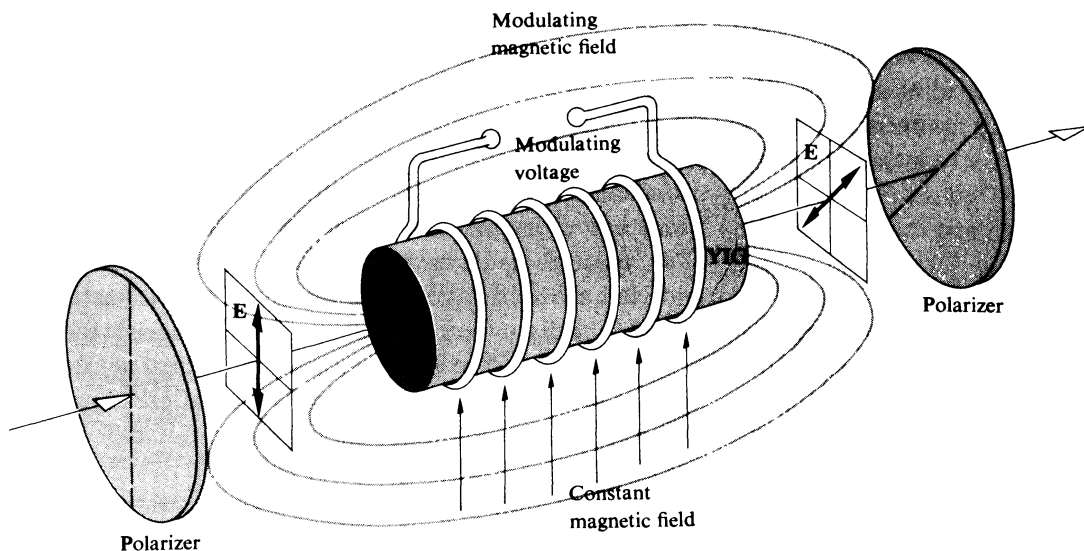


Abbildung 3.8: Veranschaulichung des Faraday-Effekts [Hec02, S. 368]

4 Interferenz

4.1 Zeitliche und räumliche Kohärenz

Die Interferenzfähigkeit von Wellenfeldern wird durch die *Kohärenz* beschrieben, welche in *zeitliche* und *räumliche* Kohärenz unterteilt ist [Mes08, S. 180].

Die zeitliche Kohärenz wird dadurch ausgedrückt, dass sich die Phasendifferenz

$$\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_k \quad (4.1)$$

der Teilwellen \vec{E}_j und \vec{E}_k an einem Raumpunkt $P(\vec{r})$ innerhalb des Beobachtungszeitraums Δt um weniger als 2π ändert. Die *Kohärenzzeit* Δt_c ist dann diejenige Zeit, nach der sich diese Phasendifferenz um höchstens 2π geändert hat [Dem06, S. 299]. Sie ist direkt mit der spektralen Breite $\Delta\nu$ einer Lichtquelle der Frequenz ν verbunden [Dem06, S. 299]:

$$\Delta t_c = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (4.2)$$

Eine andere Definition der Kohärenzzeit ist, dass sie die mittlere Zeit angibt, in der die Welle eine vorhersagbare Schwingung ausführt [Hec02, S. 390].

Daneben zeigt Gleichung (4.2), dass zeitliche Kohärenz ein Ausdruck von hoher „spektraler Reinheit“ ist, was sich dadurch äußert, dass eine monochromatische Lichtwelle eine unendliche Kohärenzzeit und damit auch eine unendliche, über die Kohärenzzeit definierte, *Kohärenzlänge* $\Delta l_c = c \cdot \Delta t_c$ hätte [Hec02, S. 391].

Räumliche Kohärenz liegt dann vor, wenn die räumliche Phasendifferenz

$$\Delta_r\varphi_i = \varphi_i(\vec{r}_1) - \varphi_i(\vec{r}_2) \quad (4.3)$$

einer Teilwelle \vec{E}_i an zwei verschiedenen Raumpunkten $P(\vec{r}_1)$ und $P(\vec{r}_2)$ sich innerhalb des Beobachtungszeitraums Δt um höchstens 2π ändert. Raumpunkte $P(\vec{r}_i)$, für die $\Delta_r\varphi_i = 0$ gilt, definieren die *Kohärenzfläche* F_c . Ausschließlich im *Kohärenzvolumen* $\Delta V_c = \Delta l_c \cdot F_c$ sind Interferenzphänomene beobachtbar [Dem06, S. 200]. Für eine weiterführende Beschreibung von zeitlicher und räumlicher Kohärenz siehe [Hec02, S. 560 ff.] oder [PPBS02, S. 351 ff.].

4.2 Mathematische Beschreibung des Interferenzphänomens

Wie in Gleichung (3.24) zu sehen ist, gehorchen die elektrischen Felder - wie auch die magnetischen Felder - einer elektromagnetischen Welle auf Grund der Linearität der Wellengleichung (3.5) dem *Superpositionsprinzip*. Daraus folgt, dass sich bei einer Überlagerung von m Teilwellen, die Interferenz genannt wird, das Gesamtfeld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ schreiben lässt als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_m \vec{A}_m(\vec{r}, t) e^{i\varphi_m}, \quad (4.4)$$

wobei $\vec{A}_m(\vec{r}, t)$ die Amplitude und $e^{i\varphi_m}$ die Phase der m -ten Teilwelle ist [Dem06, S. 299].

4.2.1 Zweistrahl-Interferenz bei gleicher Frequenz

Folgende Herleitung soll als Ergebnis die Gesamtintensität I bei Addition von zwei Teilwellen \vec{E}_1 und \vec{E}_2 bei gleicher Frequenz aufzeigen. Dabei sollen die Polarisationsrichtungen parallel sein, sodass nur die Beträge der Feldvektoren betrachtet werden müssen. Die Herleitung orientiert sich an [Lit04, S. 41 ff.]:

Die beiden Gleichungen der Teilstrahlen mit \vec{k} als dem Wellenvektor und ϕ als Anfangsphasen lauten:

$$\begin{aligned} E_1(\vec{r}, t) &= E_{01} \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi_1)} \\ E_2(\vec{r}, t) &= E_{02} \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi_2)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Das Gesamtfeld $E(\vec{r}, t)$ schreibt sich nach Gleichung (4.4) als

$$\begin{aligned} E(\vec{r}, t) &= E_1(\vec{r}, t) + E_2(\vec{r}, t) \\ &= \left(E_{01} \cdot e^{i\phi_1} + E_{02} \cdot e^{i\phi_2} \right) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Gesamtintensität I ist proportional zum Betragsquadrat des Gesamtfeldes, was bedeutet:

$$\begin{aligned} I &= \frac{c\epsilon_0}{2} |E|^2 = \frac{c\epsilon_0}{2} E E^* \\ &= \frac{c\epsilon_0}{2} \left[\left(E_{01} \cdot e^{i\phi_1} + E_{02} \cdot e^{i\phi_2} \right) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right] \cdot \left[\left(E_{01} \cdot e^{-i\phi_1} + E_{02} \cdot e^{-i\phi_2} \right) \cdot e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{c\epsilon_0}{2} \left(E_{01}^2 + E_{02}E_{01} \cdot e^{i(\phi_2-\phi_1)} + E_{01}E_{02} \cdot e^{-i(\phi_2-\phi_1)} + E_{02}^2 \right) \\
 &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(\phi_2 - \phi_1)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Das heißt, je nach Phasendifferenz $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ der beiden Teilstrahlen, existiert ein bestimmter Interferenzzustand, wobei vollständig *konstruktive* Interferenz bei $\Delta\phi = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ und vollständig *destruktive* Interferenz bei $\Delta\phi = (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$ vorliegt. Damit lässt sich die sogenannte *Visibilität* V , ein Maß für die Sichtbarkeit der Interferenz, definieren als

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_1 + I_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{I_1/I_2}}{1 + I_1/I_2}. \tag{4.8}$$

Für $I_1 = I_2$, das heißt $V = 1$, ist die Interferenz am besten detektierbar.

4.2.2 Zweistrahl-Interferenz bei verschiedener Frequenz

Bei einer Überlagerung von zwei Teilstrahlen E_1 und E_2 mit identischer Polarisation, aber verschiedenen Frequenzen, das heißt $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, orientiert sich die Herleitung analog zu Kapitel 4.2.1 an [Hec02, S. 294 ff.] und [Lit04, S. 44]:

Startpunkt sind wieder zwei Teilstrahlen nach:

$$\begin{aligned}
 E_1(\vec{r}, t) &= E_{01} \cdot e^{i(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t + \phi_1)} \\
 E_2(\vec{r}, t) &= E_{02} \cdot e^{i(\vec{k}_2\vec{r} - \omega_2 t + \phi_2)}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Das Gesamtfeld $E(\vec{r}, t)$ ergibt sich zu

$$E(\vec{r}, t) = E_{01} \cdot e^{i(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t + \phi_1)} + E_{02} \cdot e^{i(\vec{k}_2\vec{r} - \omega_2 t + \phi_2)} \tag{4.10}$$

mit folgender Gesamtintensität:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{c\epsilon_0}{2} |E|^2 = \frac{c\epsilon_0}{2} EE^* \\
 &= \frac{c\epsilon_0}{2} \left[E_{01} e^{i(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t + \phi_1)} + E_{02} e^{i(\vec{k}_2\vec{r} - \omega_2 t + \phi_2)} \right] \cdot \left[E_{01} e^{-i(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t + \phi_1)} + E_{02} e^{-i(\vec{k}_2\vec{r} - \omega_2 t + \phi_2)} \right] \\
 &= \frac{c\epsilon_0}{2} \left(E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{02}E_{01} e^{i((\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r} - \Delta\omega t + \phi_2 - \phi_1)} + E_{01}E_{02} e^{-i((\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r} - \Delta\omega t + \phi_2 - \phi_1)} \right) \\
 &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos\left((\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r} - \Delta\omega t + \Delta\phi \right).
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Im Fall identischer Ausbreitungsrichtungen der Teilwellen, das heißt $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$, vereinfacht sich Gleichung (4.11) zu

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\omega t - \Delta\phi) . \quad (4.12)$$

Die messbare Gesamtintensität oszilliert demnach zwischen ihrem Minimum und Maximum mit der *Schwebungsfrequenz* $\Delta\omega$.

4.2.3 Zweistrahl-Interferenz bei verschiedener Polarisation

Voraussetzung für das Erscheinen der Interferenz ist, neben der in Kapitel 4.1 gezeigten Kohärenz, auch die richtige relative Polarisation der interferierenden Teilstrahlen. Wird Gleichung (4.4) auf zwei Teilstrahlen angewendet, deren Polarisationen $\vec{\epsilon}_1$ und $\vec{\epsilon}_2$ verschieden, aber deren Ausbreitungsrichtungen, Amplituden und Frequenzen identisch sind, lässt sich das Gesamtfeld wie folgt schreiben:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \left(\vec{\epsilon}_1 e^{i\phi_1} + \vec{\epsilon}_2 e^{i\phi_2} \right) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (4.13)$$

Die Berechnung der Gesamtintensität liefert folgendes Ergebnis:

$$I = c\epsilon_0 \left[E_0^2 + E_0^2 \cdot \vec{\epsilon}_1 \vec{\epsilon}_2 \left(e^{i\Delta\phi} + e^{-i\Delta\phi} \right) \right] = 2I_0 + 2I_0 \cdot \vec{\epsilon}_1 \vec{\epsilon}_2 \cdot \cos(\Delta\phi) \quad (4.14)$$

Sofort wird offensichtlich, dass der Interferenzterm $2I_0 \cdot \vec{\epsilon}_1 \vec{\epsilon}_2 \cdot \cos(\Delta\phi)$ im Fall von $\vec{\epsilon}_1 \perp \vec{\epsilon}_2$ verschwindet und keine Interferenz auftritt. Somit ist es wichtig, dass Teilwellen überlagert werden, deren Polarisationsrichtungen parallele Komponenten aufweisen, um Interferenz beobachten zu können.

4.3 Vorstellung zweier Interferometer

Interferometer sind optische Instrumente, mit denen die Lichtinterferenz messtechnisch genutzt werden kann. In einem Interferometer werden aus dem einfallenden Primärstrahl kohärente Teilstrahlen erzeugt, die nach Durchlaufen verschiedener optischer Weglängen zur Erzeugung eines Interferenzmusters überlagert werden [PPBS02, S. 325].

Die verschiedenen Interferometer werden einerseits hinsichtlich der Anzahl der Teilstrahlen unterschieden - Zweistrahl-Interferometer oder Mehrstrahl-Interferometer - und andererseits hinsichtlich der Art, wie diese Teilstrahlen erzeugt werden. Bei der *Wellenfrontteilung*

werden Teilbereiche aus ein und derselben Wellenfront zur Interferenz gebracht, wogegen bei der *Amplitudenteilung* die Wellenfront des Primärstrahls hinsichtlich ihrer Intensität, beispielsweise durch einen halbdurchlässigen Spiegel, aufgeteilt wird [PPBS02, S. 325].
 Nachfolgend werden zwei grundlegende Zweistrahl-Interferometer mit Amplitudenteilung, das *Michelson-Interferometer* und das *Mach-Zehnder-Interferometer*, vorgestellt.

4.3.1 Das Michelson-Interferometer

Abbildung (4.1) zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Michelson-Interferometers:

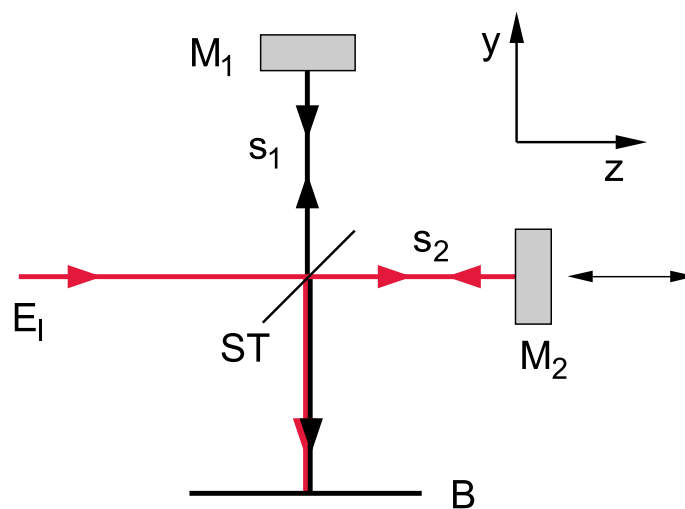


Abbildung 4.1: Schema des Michelson-Interferometers [Dem06, S. 305]

Betrachtet wird eine in z -Richtung laufende ebene Welle, die an einem Strahlteiler ST in zwei Teilstrahlen aufgeteilt wird. Der reflektierte Teilstrahl propagiert entlang s_1 in y -Richtung, wird am Spiegel M_1 reflektiert und trifft nach Transmission durch den Strahlteiler auf die Beobachtungsebene B . Der zunächst transmittierte Teilstrahl durchläuft den Pfad s_2 in z -Richtung und wird am Spiegel M_2 reflektiert. Am Strahlteiler wird dieser Teilstrahl zur Überlagerung in Richtung der Beobachtungsebene reflektiert [Dem06, S. 305/306].

Analog zu Gleichung (4.7) liegt in der Beobachtungsebene folgende mittlere Intensität vor [Dem06, S. 306]:

$$\bar{I}_T = RTI_0 (1 + \cos(\Delta\varphi)) \quad (4.15)$$

Dabei sind R und T das Reflexions- beziehungsweise Transmissionsvermögen des Strahlteilers, I_0 die einfallende Intensität und $\Delta\varphi$ die Phasendifferenz der Teilstrahlen. Diese

lässt sich angeben nach

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(s_2 - s_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s \quad (4.16)$$

mit λ als Wellenlänge und Δs als Weglängendifferenz.

Das Michelson-Interferometer findet Anwendung in Experimenten zur Bestimmung der Wellenlänge von Licht, indem der Spiegel M_2 in Abbildung (4.1) in z -Richtung variiert wird (siehe [Dem06, S. 306]). Daneben wird es eingesetzt, um den Brechungsindex von Gasen zu bestimmen [PPBS02, S. 330].

4.3.2 Das Mach-Zehnder-Interferometer

Eine Möglichkeit, ein Mach-Zehnder-Interferometer zu verwirklichen, ist in Abbildung (4.2) zu sehen:

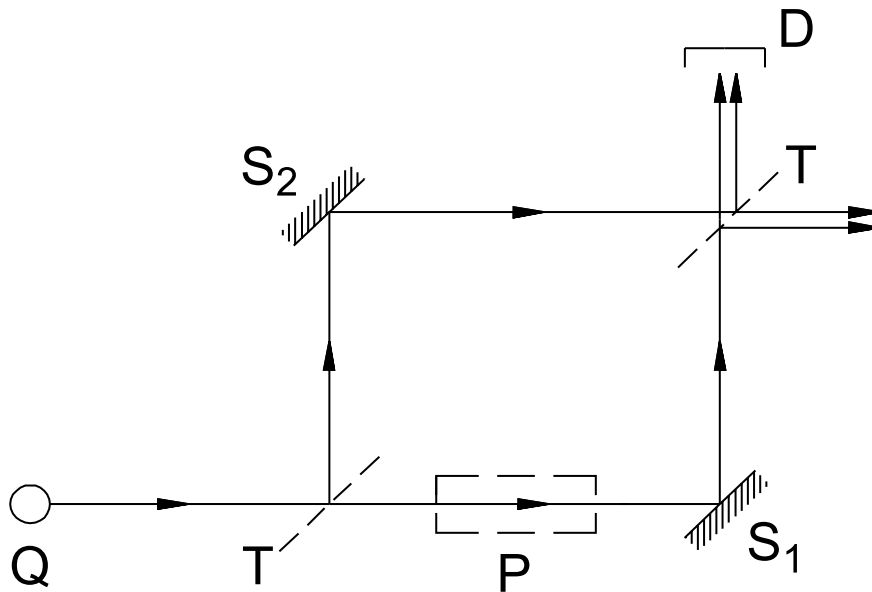


Abbildung 4.2: Schema des Mach-Zehnder-Interferometers [HM05, S. 42]

Der Primärstrahl von der Quelle Q wird am ersten Strahlteiler T in zwei Teilstrahlen zerlegt. Der reflektierte Strahl wird über den Spiegel S_2 umgelenkt und trifft auf den zweiten Strahlteiler. Der am ersten Strahlteiler transmittierte Strahl wird durch den Spiegel S_1 ebenso auf den zweiten Strahlteiler umgelenkt. Dort werden beide Teilstrahlen überlagert, zur Interferenz gebracht und können an beiden Ausgängen mit einem Detektor D detektiert werden.

Die Signale an beiden Ausgängen sind komplementär, das heißt, sie weisen selbst bei exakt symmetrischem Aufbau, auf Grund der Strahlführung, eine grundsätzliche Phasenverschiebung $\Delta\varphi_0 = \pi$ auf. Das liegt daran, dass bei Reflexion an einem der optisch dichteren Strahlteiler und Spiegel ein Phasensprung von π entsteht [Dem06, S. 311].

Daraus folgt, dass bei exakt symmetrischem Aufbau und idealer Lichtquelle ein Ausgang immer dunkel ist, während im anderen Ausgang die gesamte Primärleistung ankommt. Diese Symmetrie wird dadurch ausgenutzt, dass eine Probe P in einem der Teilstrahlen eingebracht wird, die eine Länge L aufweist und einen von Eins verschiedenen Brechungsindex N besitzt, um beispielsweise diesen Brechungsindex bei bekannter Länge zu bestimmen. Es gilt Interferenzgleichung (4.7) und bei gegebener Wellenlänge λ führt die Probe zu einer Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ von

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (N - 1) L . \quad (4.17)$$

Vorteile des Mach-Zehnder-Interferometers sind zum einen, dass es sehr flexibel einsetzbar ist, da die beiden Pfade weit separiert werden können und die Pfade nur einmal durchlaufen werden, was es möglich macht, richtungsabhängige Effekte vermessen zu können [Har03, S. 26/27], [Lit04, S. 50]. Zum anderen können zwei Ausgänge zur Messung genutzt werden und es wird vermieden, dass, wie beim Michelson-Interferometer, ein Teil der Leistung in die Quelle zurückreflektiert wird, was das Emissionsverhalten des Lasers beeinflussen kann [Lit04, S. 50].

Das Mach-Zehnder-Interferometer wird angewendet, um Brechungsindizes sehr präzise zu bestimmen [HM05, S. 42]. Damit hängt zusammen, dass es bei Messungen an Gasströmungen, Verbrennungen, Plasmen und Diffusionsprozessen zum Einsatz kommt, bei denen eine Änderung der Brechzahl auftritt [Har03, S. 27].

5 Konzipierung eines heterodynem Interferometers

5.1 Schematische Darstellung des Interferometers

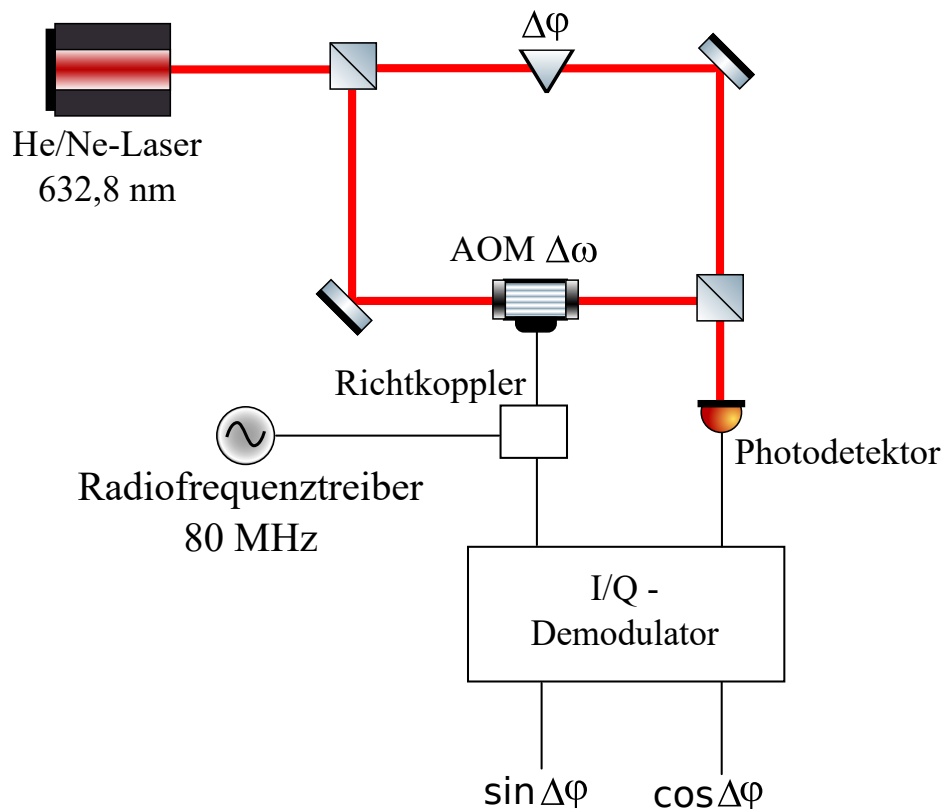


Abbildung 5.1: Übersicht über das verwendete Interferometer inklusive elektrotechnischer Komponenten

Wie in Abbildung (5.1) zu sehen ist, besteht das verwendete Interferometer im Wesentlichen aus einem Mach-Zehnder-Interferometer, wie es in Kapitel 4.3.2 beschrieben ist. Der Gesamtaufbau orientiert sich an [TKS⁺86] und [CTUT09]. Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ im oberen Teilstrahl steht repräsentativ für das Phasenobjekt, an dem das Interferometer getestet wird beziehungsweise für die Plasmaquelle, für die das Interferometer konzipiert worden ist. Im unteren Teilstrahl wird ein akusto-optischer Modulator (AOM) eingefügt, mit dessen Hilfe die Kreisfrequenz des Laserlichts um einen Betrag $\Delta\omega$ verschoben wird. Als Lichtquelle dient ein linear polarisierter Helium/Neon-Laser, der bei einer Wellenlänge

von 632,8 nm emittiert. Ausgewertet werden die zur Interferenz gebrachten Teilstrahlen mittels eines Photodetektors.

Der akusto-optische Modulator wird von einem Radiofrequenztreiber mit einer Frequenz von 80 MHz betrieben. Aus deren Verbindungslinie wird mittels eines Richtkopplers ein bestimmter Anteil der Leistung des Treibersignals ausgekoppelt und zusammen mit dem Detektorsignal in einen I/Q-Demodulator (quadrature phase comparator) gegeben, der zur Ermittlung der Phasenverschiebung dient.

5.2 Übersicht über die Komponenten

5.2.1 Helium/Neon-Laser

Bei dem im Experiment verwendeten Laser handelt es sich um einen Helium/Neon-Laser. Laser, die atomare Gase, sprich Edelgase, als Medium verwenden, sind besonders geeignet, um Laserlicht im sichtbaren Spektralbereich zu erzeugen [EE10, S. 69]. Abbildung (5.2) zeigt die spektralen Übergänge des Helium/Neon-Lasers:

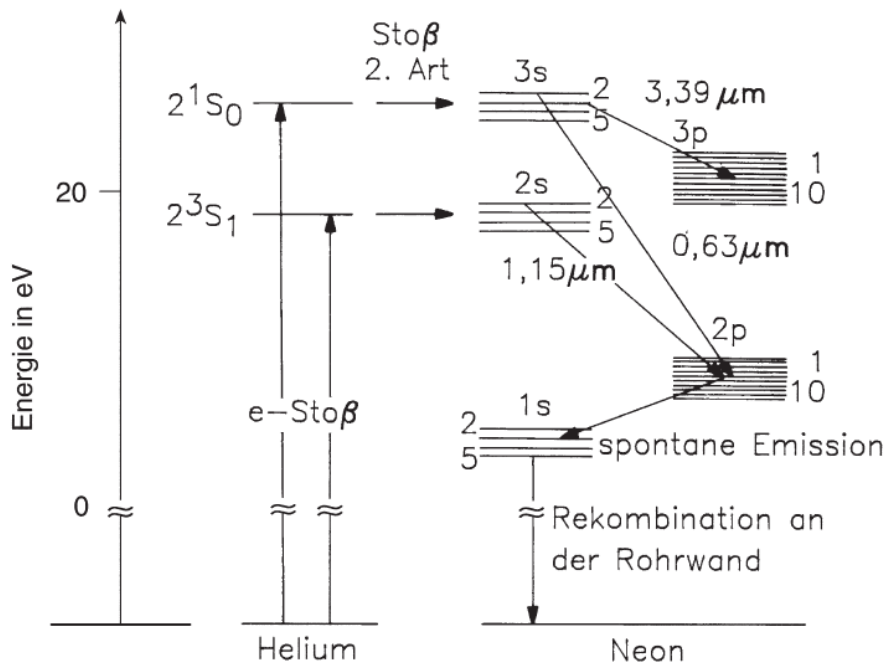
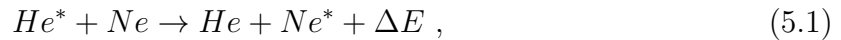


Abbildung 5.2: Termschema des Helium/Neon-Lasers [EE10, S. 70]

Wie zu sehen ist, wird das Heliumatom mittels Elektronenstößen in einen angeregten Zustand gebracht. Die Energie für die Anregung wird durch eine elektrische Entladung bereitgestellt. Diese angeregten Zustände besitzen eine große Lebensdauer, sodass die

Dichte der angeregten Heliumatome hoch ist. Durch Stöße 2. Art, das heißt durch die Abregung der Heliumatome mittels einer Anregung der Neonatome



wird die für den Laserbetrieb notwendige Inversionsbesetzung der oberen Niveaus des Neon geschaffen. Ohne Manipulation würde der Helium/Neon-Laser bei einer Wellenlänge von $3,39 \mu\text{m}$ emittieren. Die Emission von sichtbarem Licht bei $0,63 \mu\text{m}$ wird durch selektive Spiegel oder Brewsterfenster erreicht, die das Anschwingen der $3,39 \mu\text{m}$ -Linie verhindern [EE10, S. 71 ff.]. In Abbildung (5.3) ist der Aufbau eines Helium/Neon-Laser zu sehen:

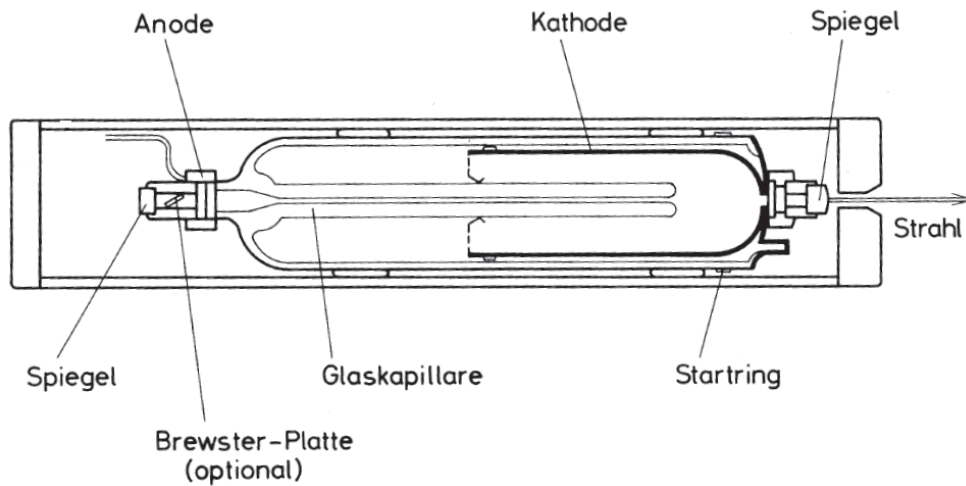


Abbildung 5.3: Aufbau eines Helium/Neon-Lasers [EE10, S. 73]

Die Gasentladung wird mit einer Spannung von etwa 2 kV betrieben, wobei der elektrische Strom im Bereich von 5-10 mA liegt. Die Glaskapillare ist typischerweise nicht größer als 1 mm im Durchmesser um die Wandrekombination möglichst effizient zu halten. Um die 632,8 nm-Linie zu emittieren wird ein Gasmischungsverhältnis von 5 zu 1 von Helium zu Neon gewählt. Die Strahlpolarisation wird durch Brewster-Platten erreicht, die nur Licht bestimmter Polarisierung transmittieren, wogegen die dazu senkrechte Polarisationsrichtung reflektiert wird.

Bei dem verwendeten Laser handelt es sich um das Modell PL-710 1008P von Polytec, dessen Leistung 2 mW beträgt. Der Strahl besitzt einen Durchmesser von 0,75 mm, ist linear polarisiert und weist eine Divergenz von $\leq 1,2 \text{ mrad}$ auf.

5.2.2 Akusto-optischer Modulator

Eines der wesentlichsten Bauteile des Interferometers ist der akusto-optische Modulator. Er ermöglicht es, eine Frequenzverschiebung in einem Laserstrahl von einer bestimmten Größe hervorzurufen. Abbildung (5.4) zeigt die Konzipierung eines solchen Modulators:

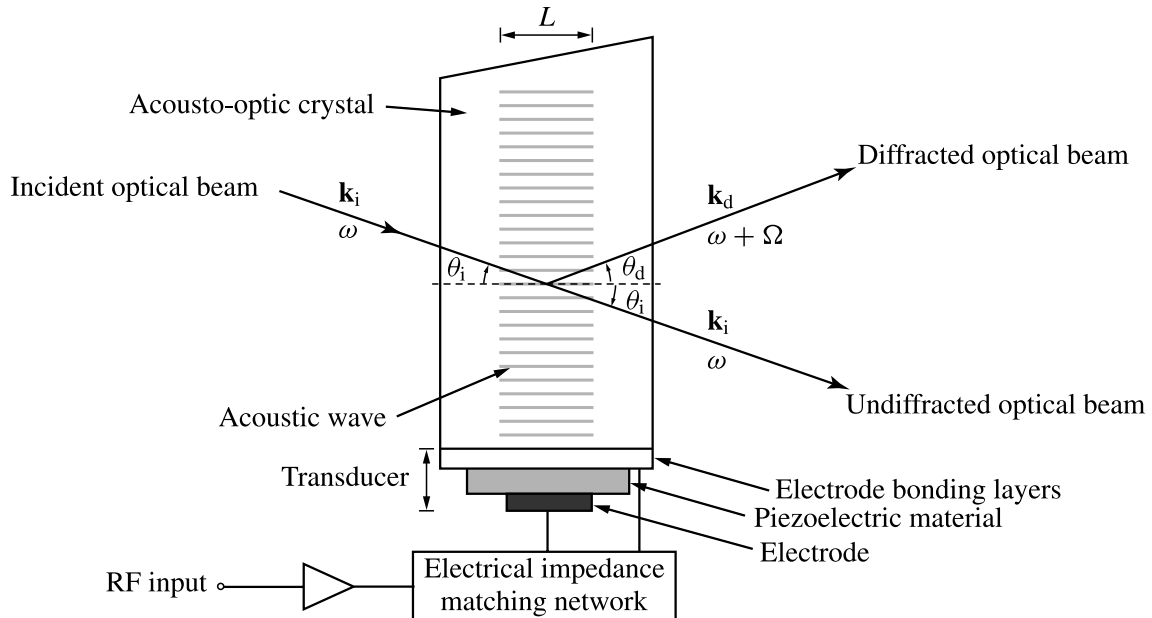


Abbildung 5.4: Schema eines akusto-optischen Modulators [Liu05, S. 390]

Er besteht aus einem akusto-optischen Kristall, einem piezoelektrischen Signalgeber und einem Absorber. Dieser ist in Abbildung (5.4) nicht zu sehen und befindet sich gegenüber des Signalgebers am anderen Ende des akusto-optischen Kristalls.

Wird eine Spannung an den Signalgeber angelegt, ändert dieser nach dem piezo-elektrischen Effekt, in Abhängigkeit von der Spannungsamplitude, seinen Hub. Durch eine Wechselspannung der Kreisfrequenz Ω lassen sich Schallwellen erzeugen, die durch den Kristall propagieren. Der Absorber dient dazu, Reflexionen am Kristallende und damit stehende Wellen im Kristall zu unterbinden. Um die Frequenzverschiebung zu erreichen, muss der Laserstrahl unter einem bestimmten Winkel, dem *Bragg-Winkel*, in den Kristall einfallen. Die Wechselwirkung des Laserlichts mit dem Kristall und den darin erzeugten Schallwellen lässt sich analog zur *Bragg-Beugung* an einem Gitter beschreiben. Das Gitter wird dadurch erzeugt, dass die Schallwellen periodische Dichteschwankungen hervorrufen, wodurch periodische Brechzahlchwankungen des Kristalls erzeugt werden [Mes08, S. 143]. Da es sich um ein laufendes Gitter handelt, kommt es zu einer Dopplerverschiebung der einfallenden Laserlichtkreisfrequenz ω um die Wechselspannungskreisfrequenz Ω . Besitzt die Ausbreitungsrichtung des Laserlichts eine Komponente antiparallel zur Ausbreitungs-

richtung der Schallwelle, ergibt sich eine verschobene Kreisfrequenz $\omega' = \omega + \Omega$, im Fall einer parallelen Komponente ist $\omega' = \omega - \Omega$ (vgl. [Liu05, S. 375]). Des Weiteren ist sowohl in Abbildung (5.4), als auch in Abbildung (5.5) ersichtlich, dass nicht die komplette einfallende Lichtleistung in die 1. Ordnung gebeugt wird, sondern ein gewisser Teil der Strahlung unverändert transmittiert wird. Abbildung (5.5) gib einen Überblick über die *Bragg-Beugung* im Kristall:

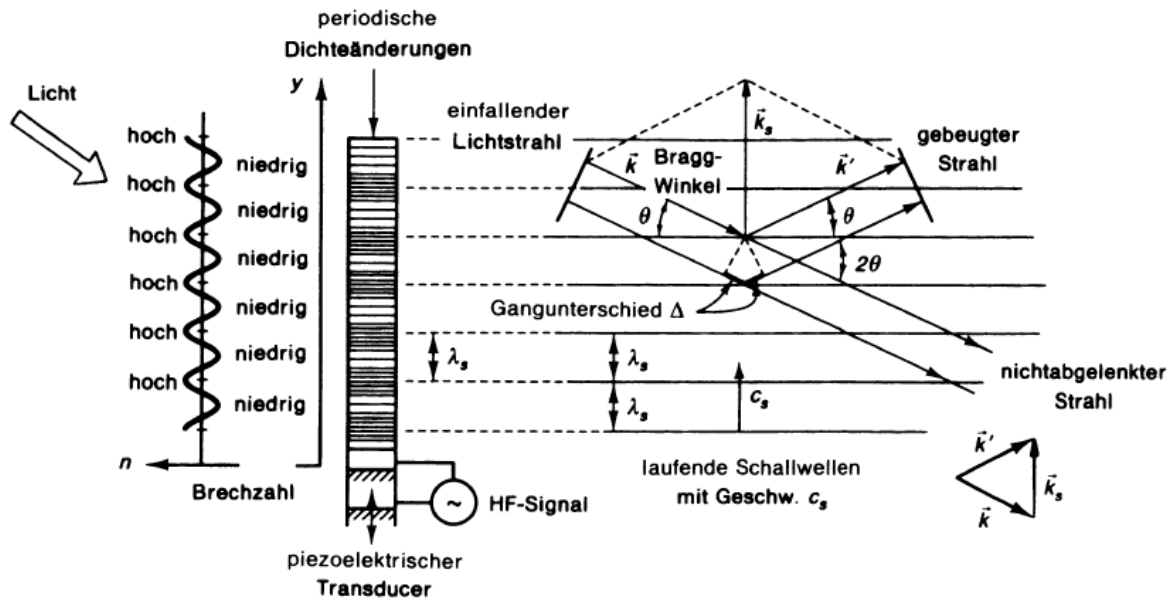


Abbildung 5.5: Bragg-Beugung in einem akusto-optischen Modulator [PPBS02, S. 794]

Neben dem bisher erläuterten *Bragg-Regime* existiert das sogenannte *Raman-Nath-Regime*. In diesem Regime werden mehrere Beugungsordnungen beobachtet. *Raman-Nath-Beugung* entsteht nur bei (nahezu) senkrechtem Einfall des Laserlichts in die Schallwelle mit der Bedingung

$$Q = 2\pi \frac{\lambda f^2 l}{nc_s^2} \ll 1, \quad (5.2)$$

wobei n der Brechungsindex und l die Breite der Wechselwirkungszone ist. In praktischer Anwendung wird typischerweise $Q \leq 0,3$ gewählt [Liu05, S. 372/373].

Das Bragg-Regime liegt dagegen als Grenzfall

$$Q = 2\pi \frac{\lambda f^2 l}{nc_s^2} \gg 1 \quad (5.3)$$

und in praktischer Anwendung mit $Q \geq 4\pi$ vor [Liu05, S. 375].

Bei dem für diese Arbeit verwendeten akusto-optischen Modulator handelt es sich um das Modell 3080-120 von GoochandHousego. In Tabelle (5.1) sind dessen Parameter aufgeführt (vgl. [EQ]):

Material	TeO ₂
Schallgeschwindigkeit	4,2 mm/μs
Aktive Apertur	2,5 mm x 1 mm
Wellenlänge	442 – 633 nm
Leistungsdichte	250 W/mm ²
Sättigungs RF Leistung	0,55 W (633 nm)
Bragg-Winkel	6 mr (633 nm)
Beugungseffizienz	85 % (0,5 mm Strahldurchmesser)

Tabelle 5.1: Parameter des akusto-optischen Modulators

5.2.3 Photodetektor

Bei Photodetektoren handelt es sich häufig um Halbleiterdioden mit einem p-n-Übergang. Für andere Detektortypen siehe [Liu05, S. 926 ff.]. Diffusionsprozesse der Ladungen in den dotierten Bereichen führen zu einem inneren elektrischen Feld und damit zu einem Potentialgradienten am p-n-Übergang [Liu05, S. 966]. Abbildung (5.6) veranschaulicht diesen Sachverhalt:

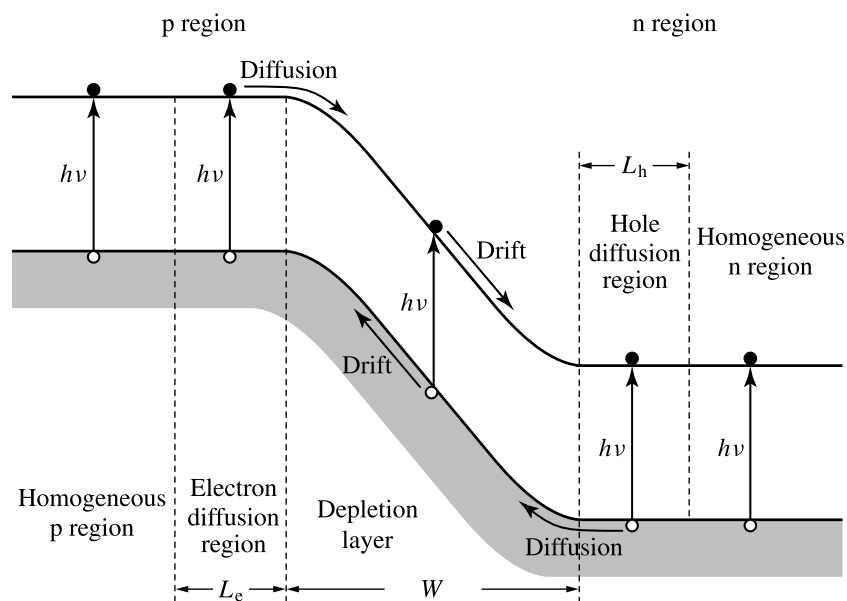


Abbildung 5.6: Potentialgradient und Photoanregung am p-n-Übergang [Liu05, S. 968]

Zu sehen ist, dass nur Elektron-Loch-Paare zum Photostrom beitragen, die in den Diffusionszonen L_e beziehungsweise L_h und der Raumladungszone W erzeugt werden.

Der bei Lichteinfall erzeugte Photostrom i_{ph} ist

$$i_{ph} = \eta_e \frac{eP_s}{h\nu} . \quad (5.4)$$

Dabei ist η_e die Quanteneffizienz, e die Elementarladung, P_s die eingestrahlte Lichtleistung und $h\nu$ die Photonenenergie. Der Gesamtstrom i ist, neben der Lichtleistung, auch von der angelegten Spannung abhängig nach

$$i(V, P_s) = I_0 \left(e^{eV/ak_B T} - 1 \right) - \eta_e \frac{eP_s}{h\nu} , \quad (5.5)$$

wobei I_0 der Dunkelstrom, a der Absorptionskoeffizient und $k_B T$ die thermische Energie ist [Liu05, S. 969].

Eine derartige Photodiode kann, je nach Richtung der Vorspannung V , auf zwei Arten betrieben werden: Bei positiver Vorspannung wird vom *photovoltaic mode* gesprochen, bei negativer Vorspannung $V = -V_r$ liegt der *photoconductive mode* vor. Beide Arbeitsweisen werden in Abbildung (5.7) dargestellt:

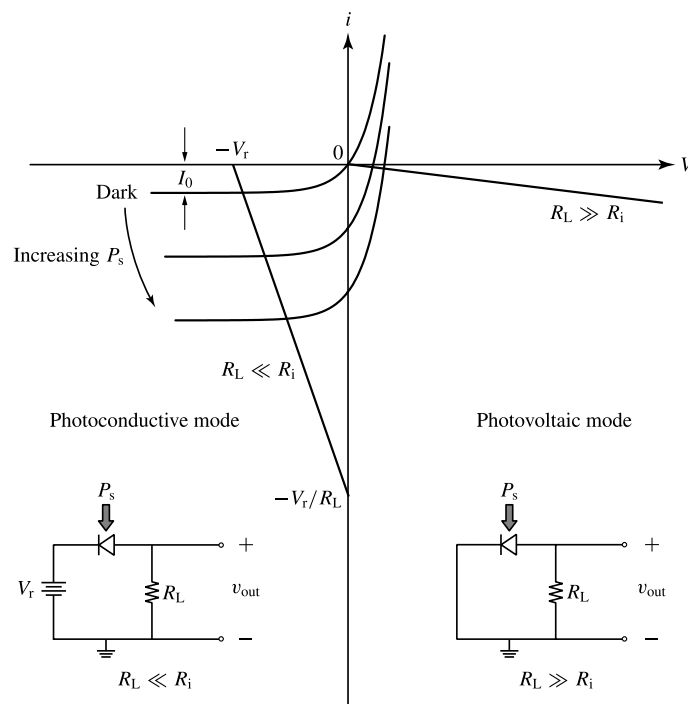


Abbildung 5.7: Verschiedene Betriebsmöglichkeiten von Photodioden [Liu05, S. 970]

In beiden Fällen wird ein Lastwiderstand R_L dazu genutzt, um aus dem Photostrom ein Spannungssignal v_{out} zu generieren. Im photoconductive mode liegt unter der Bedingung $R_L \ll R_i$ und $v_{out} < -V_r$ ein linearer Zusammenhang zwischen Photostrom und Spannungssignal vor [Liu05, S. 970]:

$$v_{out} = (I_0 + i_s) R_L = \left(I_0 + \eta_e \frac{eP_s}{h\nu} \right) R_L \quad (5.6)$$

Im photovoltaic mode gilt, unter der Bedingung $R_L \gg R_i$, folgende Beziehung zwischen Ausgangsspannung und einfallender Lichtleistung [Liu05, S. 971]:

$$v_{out} \approx \frac{ak_B T}{e} \ln \left(1 + \eta_e \frac{eP_s}{h\nu I_0} \right) \quad (5.7)$$

Weitere Vorteile einer negativen Vorspannung sind, neben der Linearität von Photostrom und Ausgangsspannung, zum einen die Erhöhung der Driftgeschwindigkeit und damit die Verringerung der Transitzeit, und zum anderen wird die Raumladungszone vergrößert, wodurch einerseits die Übergangskapazität sinkt und damit eine bessere Ansprechzeit erreicht wird, und andererseits die lichtensitive Fläche vergrößert wird [ST91, S. 660].

Bei dem im Experiment verwendeten Photodetektor handelt es sich um das Modell DET10A(/M) von Thorlabs. In Abbildung (5.8) werden besondere Parameter des Detektors dargestellt:

Electrical Specifications		
Detector		Silicon
Active Area		Ø1.0 mm (0.8 mm ²)
Wavelength Range	λ	200 to 1100 nm
Peak Wavelength	λ_p	730 nm (typ)
Peak Response ²	$\mathfrak{R}(\lambda_p)$	0.44 A/W (typ)
Shunt Resistance	R_{sh}	1 GΩ (typ)
Diode Capacitance	C_J	6 pF (typ)
Rise Time ^{2,3}	t_r	1 ns (typ)
NEP (830 nm, 10 V)	W/√Hz	1.2×10^{-13} (typ)
Photodiode Bias Voltage	V_R	10 V
Dark Current ² (with 1 MΩ Load)	I_D	0.3 nA (Typ) 2.5 nA (Max)
Output Voltage	V_{OUT}	0 to 10 V

Abbildung 5.8: Parameter des Photodetektors [Tho15, S. 13]

Für die Begriffserklärung der in Abbildung (5.8) gezeigten Parameter siehe [Liu05, S. 936 ff.].

In Abbildung (5.9) ist das Schaltbild des Detektors dargestellt. Wie zu sehen ist, handelt es sich bei dem Detektor im Wesentlichen um eine in Sperrrichtung mittels einer Batterie vorgespannte Photodiode, wie sie weiter oben beschrieben worden ist.

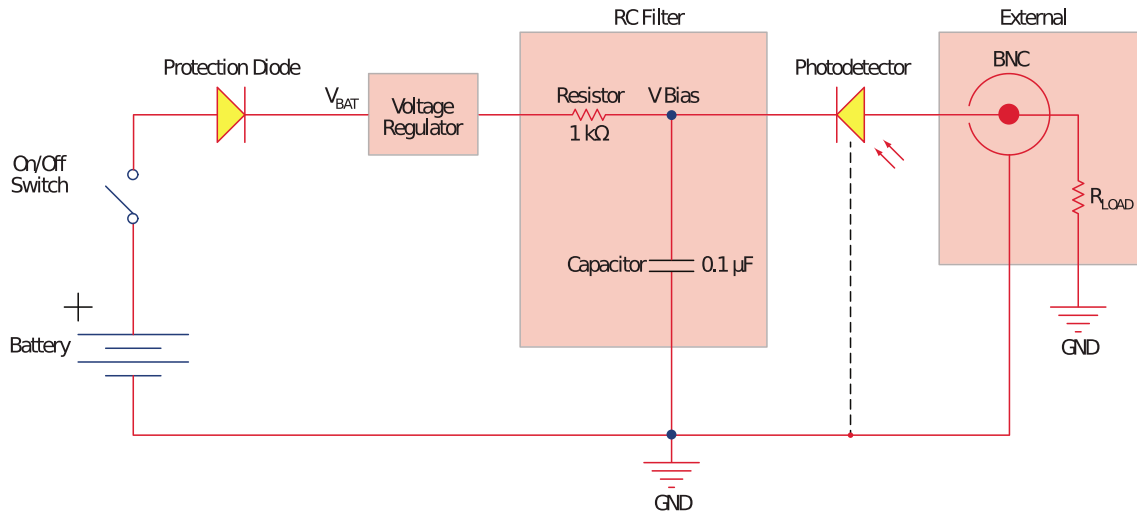


Abbildung 5.9: Schaltbild des Photodetektors [Tho15, S. 10]

Eines der besonders wichtigen Merkmale des Detektors ist seine Bandbreite. Der Detektor muss in der Lage sein, die Interferenz mit 80 MHz Modulation auflösen zu können. Die 3 dB-cut-off Frequenz f_{3dB} ist über die Anstiegszeit t_r definiert [Liu05, S. 943/944]:

$$f_{3dB} = \frac{0,35}{t_r} \quad (5.8)$$

Bei einer Anstiegszeit $t_r = 1$ ns besitzt der Detektor eine cutoff-Frequenz von $f_{3dB} = 350$ MHz, was deutlich über den geforderten 80 MHz liegt.

5.2.4 I/Q-Demodulator

Ein I/Q-Demodulator ist ein elektrotechnisches Bauteil, das in der Lage ist, eine Phasenverschiebung zwischen zwei Eingangssignalen zu ermitteln. Eine andere gängige Bezeichnung lautet *quadrature phase comparator*. Eine Schaltskizze ist in Abbildung (5.10) dargestellt.

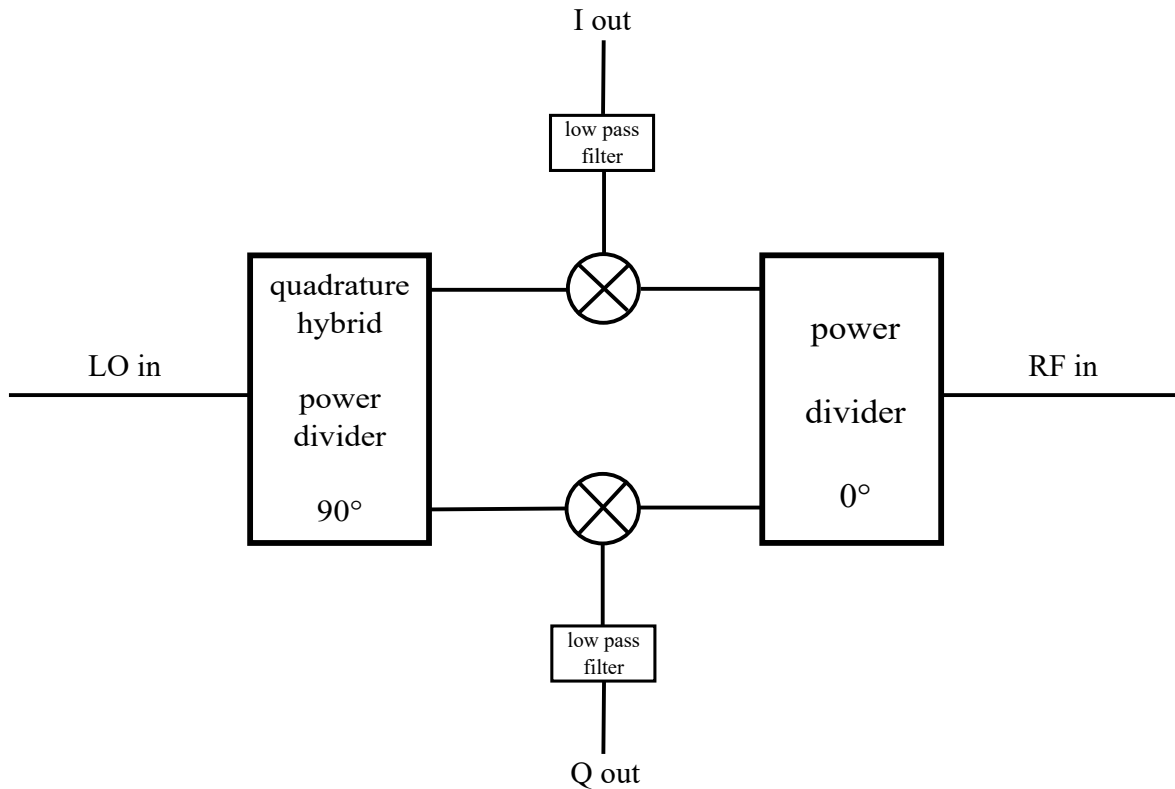


Abbildung 5.10: Schaltskizze eines I/Q-Demodulators

Wie zu erkennen ist, wird sowohl ein lokales Oszillatorsignal LO, als auch ein Radiofrequenzsignal RF in jeweils einem Leistungsteilern aufgeteilt und in zwei multiplikative Mischer gegeben. An den Signalausgängen der Mischer befinden sich zusätzliche Tiefpassfilter.

Das Funktionsprinzip ist die multiplikative Mischung zweier Signale. Das Spannungssignal $U_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ wird durch das Bauteil mit dem Spannungssignal $U_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ multipliziert. Auf Grund der Additionstheoreme ergibt sich

$$U_a = U_1 U_2 = \frac{1}{2} A_1 A_2 [\cos((\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2))] . \quad (5.9)$$

Diese Art von Mischung findet allerdings nur in einem der abgebildeten Mischer statt. Wie in Abbildung (5.10) zu sehen ist, ist einer der Leistungsteiler ein sogenannter *quadrature hybrid*. Dieser verschiebt die Phase des Signals in einem Pfad um 90° , bevor es in den Mischer gegeben wird. Daraus folgt, dass im zweiten Mischer, der dieses verschobene Signal erhält, die beiden Signale $U_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ und $U_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ multipliziert werden zu:

$$U_b = U_1 U_2 = \frac{1}{2} A_1 A_2 [\sin((\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)) + \sin((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2))] \quad (5.10)$$

Für den Fall, dass $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ gilt, vereinfachen sich die Gleichungen (5.9) und (5.10) zu

$$U_a = \frac{1}{2} A_1 A_2 [\cos(2\omega \cdot t + (\varphi_1 + \varphi_2)) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (5.11)$$

und

$$U_b = \frac{1}{2} A_1 A_2 [\sin(2\omega \cdot t + (\varphi_1 + \varphi_2)) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] . \quad (5.12)$$

Bei Verwendung von Tiefpassfiltern an den Ausgängen des Demodulators wird die 2. Harmonische 2ω herausgefiltert. Übrig bleiben der Sinus und Kosinus der Phasendifferenz:

$$U_a = \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (5.13)$$

$$U_b = \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (5.14)$$

U_a wird als das I -Signal (in-phase) und U_b als das Q -Signal (quadrature) bezeichnet.

Der verwendete I/Q-Demodulator ist für die vorliegende Arbeit, mangels eines käuflich verfügbaren kompatiblen Geräts, aus Einzelteilen zusammengebaut worden. Die Tabellen (5.2) und (5.3) zeigen die wichtigsten Parameter der Einzelteile. Für die spätere Auswertung sind vor allem Amplituden- und Phasenfehler (*amplitude imbalance, phase imbalance*) essentiell. Sie entstehen weitestgehend in den Leistungsteilern, aber auch in den Mischern, auf Grund von Asymmetrien in deren Aufbau. Diese Fehler sind teilweise auch frequenzabhängig und typischerweise in einem großen Frequenzbereich deutlich kleiner als die angegebenen Maximalfehler.

Tiefpassfilter ZX75LP-83+, Mini-Circ.		
	Frequenz	insertion loss
Passband	DC–83 MHz	2,0 dB max.
Stopband	119 – 850 MHz 160 MHz	> 30,06 dB 59,76 dB

Tabelle 5.2: Parameter des Tiefpassfilters

Quadrature Hybrid ZMSCQ-2-90, Mini-Circ.				
Frequenz		amplitude imbalance		phase imbalance
55 – 90 MHz		1,2 dB max.		3,0° max.

Power Divider Z99SC-62+, Mini-Circ.				
Frequenz		amplitude imbalance		phase imbalance
0,5 – 600 MHz		0,2 dB max.		1,0° max.

Mischer ZX05-1LHW+, Mini-Circ.				
Frequenz		IP3	1 dB comp.	conv. loss
LO: 2 – 750 MHz		15 dBm	5 dBm	5,3 dB
RF: 2 – 750 MHz		RF	RF	typ.
IF: DC – 750 MHz				

Tabelle 5.3: Parameter der Einzelteile des I/Q-Demodulators

5.3 Beschreibung des Messprinzips

5.3.1 Heterodynes Interferometer

Das *heterodyne* Interferometer verwendet seinem Namen entsprechend zwei verschiedene Wellenlängen beziehungsweise Frequenzen, die gemäß Kapitel 4.2.2 zur Interferenz gebracht werden. Das „Standardinterferometer“, das eine einzige Wellenlänge verwendet, wird als *homodyn* bezeichnet. Beim homodynem Interferometer, das Intensitäten, das heißt Amplituden, für die Messung der Phasenverschiebung verwendet, treten folgende Probleme in Bezug auf die Ermittlung der korrekten Phasenverschiebung auf [Hut05, S. 116 ff.]:

- **Amplitudenschwankungen**

Amplitudenschwankungen auf Grund von zeitlich veränderlicher Absorption oder Brechung in und an den verwendeten Komponenten wirken sich als eine Phasenverschiebung aus, sodass die tatsächliche Phasenverschiebung, die das Messobjekt erzeugt, verfälscht wird. Des Weiteren besteht die Möglichkeit, dass die Lichtquelle

zeitliche Variationen in der Ausgangsleistung aufweist, was zur selben Problematik führt. Es besteht die Möglichkeit, Amplitudenvariationen durch Intensitätsmessung der Lichtquelle und Überwachung beider Ausgänge des Interferometers zu kompensieren.

• **Uneindeutigkeit der Phase und der Phasenänderung**

Diese beiden Punkte stellen eine schwerwiegendere messtechnische Hürde als die Amplitudenvariation dar. Auf Grund der Kosinusabhängigkeit in Gleichung (4.7) gibt es Punkte, nämlich $0, \pi, 2\pi, \dots$, an denen die Phasenänderung sowohl in positiver, als auch in negativer Richtung die gleiche Auswirkung auf die zu messende Intensität hat. Des Weiteren gibt es in jeder Kosinushalbperiode, außer an den Extrema, zu jeder gemessenen Intensität zwei zugehörige Phasen, die sich zusätzlich alle 2π wiederholen und sich prinzipiell nicht unterscheiden lassen. Das soll in Abbildung (5.11) verdeutlicht werden:

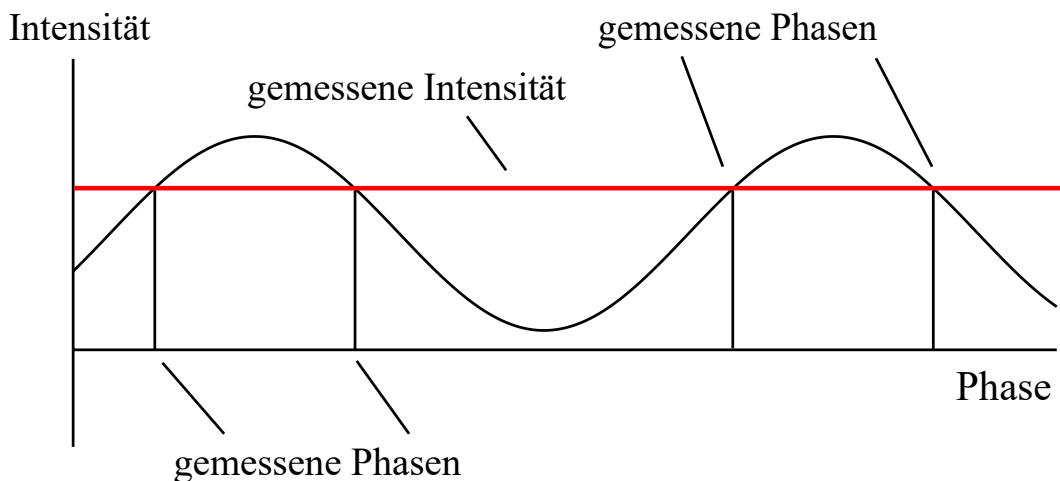


Abbildung 5.11: Darstellung der Phasenuneindeutigkeit

Die schwarze Kurve stellt die kosinusförmige Interferenzfunktion dar, die hier mit einer beliebigen Amplitude, beliebigem Offset und beliebiger Anfangsphase versehen ist. Die rote Kurve repräsentiert eine gemessene Intensität. Alle Schnittpunkte der beiden Kurven sind nicht unterscheidbare zugehörige Phasen, von denen vier markiert sind.

Falls darüber hinaus die Amplitudenschwankungen nicht kompensiert werden können, wird die Phase nicht nur uneindeutig, sondern auch fehlerhaft gemessen. Dies wird anhand von Abbildung (5.12) gezeigt.

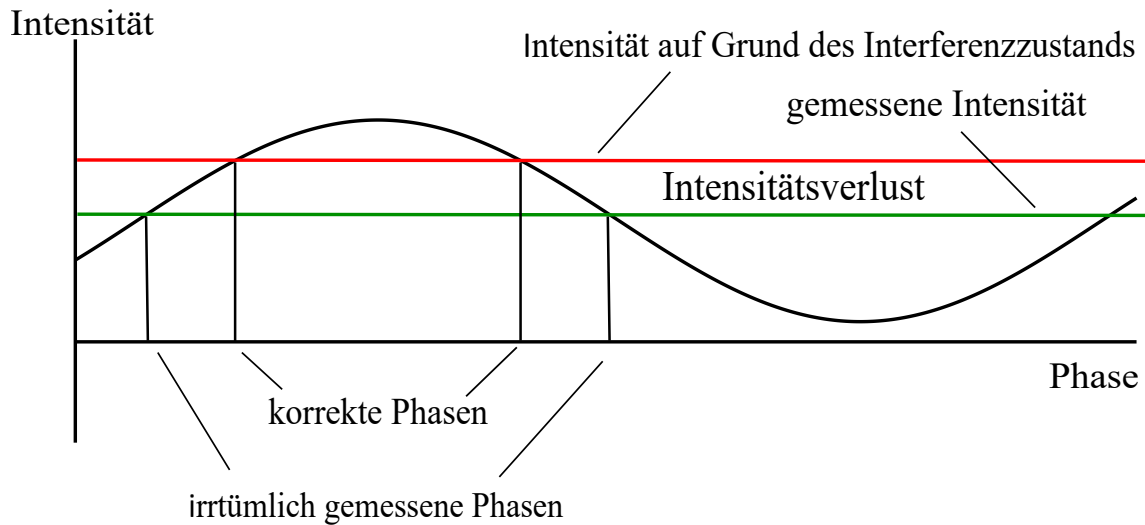


Abbildung 5.12: Verfälschte Phasen durch Intensitätsverlust

Zu sehen ist, dass die Intensität, die von einem vorliegenden Interferenzzustand hervorgerufen wird, durch beispielsweise Reflexion oder Absorption im Strahlengang abgesenkt wird. Dieser Intensitätsverlust bewirkt eine Verfälschung der ohnehin schon uneindeutigen Phasen.

Zusammenfassend kann daher festgehalten werden, dass ein homodynes Interferometer klare Nachteile mit sich bringt, auf Grund derer ohne zusätzliches Wissen über das Messobjekt, zum Beispiel eine gegebene Zeitabhängigkeit in der Phasenverschiebung, und ohne höheren messtechnischen Aufwand, wie eine Kalibrierung durch die Messung der Einzelintensitäten I_1 und I_2 in Gleichung (4.7), eine eindeutige Bestimmung der relevanten Phasenverschiebung nicht möglich ist.

Gelöst werden all diese Probleme durch die Verwendung von zwei Frequenzen. Damit wird erreicht, dass die Information der Phasenverschiebung von der Amplitude in eine Zeitinformation übergeht. Wie in Gleichung (4.11) zu erkennen ist, wird durch die Verwendung von zwei Frequenzen eine zeitabhängige Interferenz mit schwingender Intensität erzeugt, in der die gesuchte Phasenverschiebung als Verschiebung in der Zeit in Erscheinung tritt. Der Trick ist es, die zeitabhängige Interferenz, die die Phasenverschiebung trägt, mit einem Referenzsignal ohne Phasenverschiebung zeitlich zu vergleichen. Beispielsweise kann dies wie folgt verwirklicht werden [Hut05, S. 121] und [Giu10]:

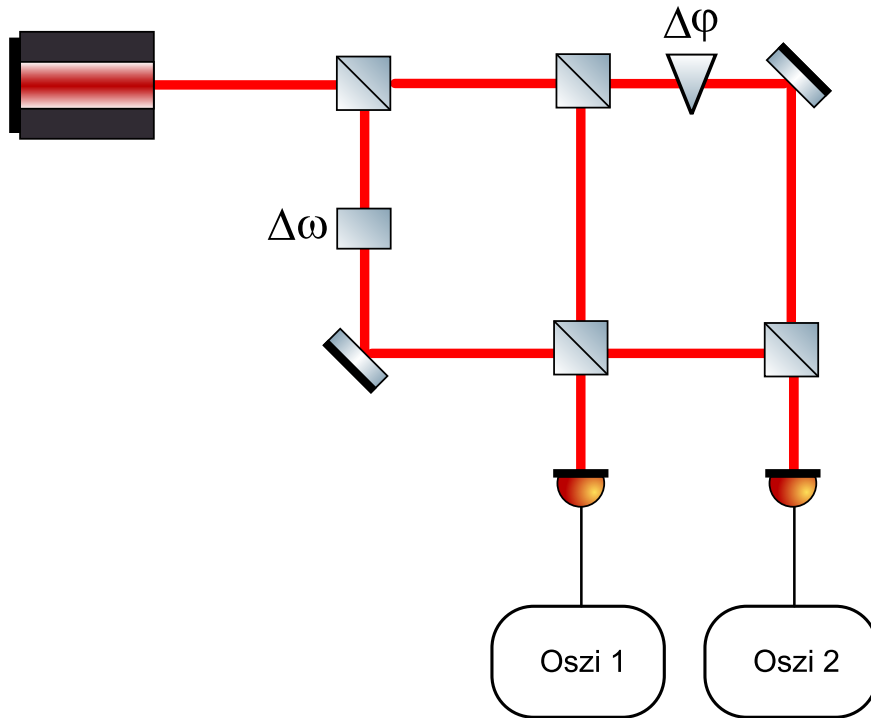


Abbildung 5.13: Möglicher Aufbau eines heterodynem Interferometers

Wie in Abbildung (5.13) sehen ist, werden zwei Mach-Zehnder-Interferometer nacheinander geschaltet und in einem der ersten beiden Teilstrahlen wird eine Frequenzverschiebung und somit die zweite Frequenz erzeugt. Das Spannungssignal an Oszilloskop 1 dient als stationäres Referenzsignal mit

$$U_1 = A + B \cdot \cos(\Delta\omega t) . \quad (5.15)$$

Das Signal an Oszilloskop 2 sammelt zusätzlich die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ auf und enthält eine Anfangsphase θ nach

$$U_2 = C + D \cdot \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi + \theta) . \quad (5.16)$$

Durch Auswertung der Zeitverschiebung Δt zwischen U_1 und U_2 kann, mit Kenntnis der Frequenzverschiebung $\Delta\omega$, auf die gesuchte Phasenverschiebung geschlossen werden nach

$$\Delta\varphi + \theta = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot \Delta t . \quad (5.17)$$

Die Anfangsphase, die von den von Eins verschiedenen Brechungsindizes der Strahlteiler und der Asymmetrie der Strahlwege herrührt, wird ermittelt, indem eine Kalibrierungsmessung ohne Phasenverschiebung durchgeführt wird.

Nachteilig an der Variante nach Abbildung (5.13) ist der große Justageaufwand, da viele der gezeigten Strahlteiler und Spiegel nicht unabhängig von einander verändert werden können. Weiterhin bietet eine höhere Anzahl an Komponenten ein höheres Fehlerpotential auf Grund äußerer Einflüsse, wie zum Beispiel Vibrationen.

Daher ist die in Abbildung (5.1) gezeigte Variante aufgebaut worden. Das Referenzsignal wird dort direkt aus der Vorrichtung, die die Frequenzverschiebung erzeugt, ausgekoppelt und mit dem Messsignal elektronisch mit einem I/Q-Demodulator ausgewertet. Dieser liefert die Messsignale U_a und U_b , wonach sich die Phasenverschiebung wie folgt mit den Gleichungen (5.13) und (5.14) berechnen lässt:

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{U_b}{U_a}\right) \quad (5.18)$$

Die Eindeutigkeit der gesuchten Phasenverschiebung innerhalb von 2π wird durch die Beachtung der Vorzeichen von U_a und U_b nach folgendem Schema gewährleistet:

- $U_a > 0 \wedge U_b > 0$: Phase im 1. Quadrant
- $U_a < 0 \wedge U_b > 0$: Phase im 2. Quadrant
- $U_a < 0 \wedge U_b < 0$: Phase im 3. Quadrant
- $U_a > 0 \wedge U_b < 0$: Phase im 4. Quadrant

Ist eine Phasenverschiebung von mehr als 2π zu erwarten und zeitlich konstant, kann dies durch die Wahl einer geeigneteren Wellenlänge nach Gleichung (3.39) korrigiert werden. Falls äußere Zwänge, wie die kritische Dichte eines Plasmas, die Wellenlänge festlegen, dann muss ohne weitere Kenntnisse zwingend eine zeitabhängige Phasenverschiebung vorliegen, da ansonsten die Phasenverschiebungen $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$ nicht unterschieden werden können. Bei einer gegebenen Zeitabhängigkeit kann dem Zeitpunkt $t = 0$ die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 0$ zugeordnet und die zeitliche Entwicklung über 2π hinaus verfolgt werden.

Des Weiteren muss beachtet werden, dass die beiden verwendeten Frequenzen derart eng bei einander liegen, dass die schwingende Interferenz von einem Detektor zeitlich aufgelöst werden kann. Eine Interferenz von Licht bei 633 nm und 532 nm würde eine Schwebungsfrequenz $\Delta\omega \approx 2\pi \cdot 90$ THz ergeben, was praktisch nicht auflösbar ist. Somit muss die Frequenzverschiebung immer auf die Bandbreite des Detektors angepasst werden und umgekehrt.

5.3.2 Vibrationen

Vibrationen können ein entscheidender Störfaktor bei einer interferometrischen Messung darstellen. Sie äußern sich in einer zusätzlichen Phasenverschiebung $\Delta\varphi_{vib}$ zur gesuchten Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ nach [Giu10]:

$$\Delta\varphi_{mess} = \Delta\varphi + \Delta\varphi_{vib} \quad (5.19)$$

Falls sich zum Beispiel einer der Spiegel durch eine Vibration um die Strecke δs verschiebt, führt das zu einer Vibrationsphasenverschiebung von

$$\Delta\varphi_{vib} = \frac{2\pi \cdot \delta s}{\lambda} . \quad (5.20)$$

Wie zu erkennen ist, ist die zusätzliche Phase indirekt proportional zur Wellenlänge. Das bedeutet, dass ein Interferometer, das mit kurzwelligem Licht arbeitet, besonders anfällig für Vibrationsstörungen ist.

Falls sich $\Delta\varphi_{vib}$ gegenüber $\Delta\varphi$ nur langsam ändert, also die beiden Zeitskalen ausreichend weit auseinander liegen, wirkt die Vibrationsphase wie eine zusätzliche konstante Anfangsphase, die sich eliminieren lässt. Andernfalls müssen Maßnahmen getroffen werden, um die Vibrationen zu kompensieren. Es existieren beispielsweise, wie in [AKON10a] beschrieben, Interferometer, die eine inhärente Vibrationskompensation besitzen. Eine andere Möglichkeit besteht in der sogenannten *two-color vibration compensation*, wie sie zum Beispiel in [LPLJC88] oder [PBA⁺14] beschrieben ist. An dieser Stelle darf „two-color“ nicht mit „heterodyn“ verwechselt werden. In diesem Kontext meint „two-color“ die Verwendung von zwei weit auseinander liegenden Wellenlängen, die zum Beispiel von zwei unterschiedlichen Lasern erzeugt werden. „Heterodyn“ bezeichnet dann die geringfügige Verschiebung dieser grundlegenden Wellenlängen, um das heterodyne Messprinzip verwenden zu können.

Wie in Gleichung (3.39) und (3.78) zu sehen ist, ist die Phasenverschiebung mit einer Konstante C direkt proportional zum Produkt aus Wellenlänge und dem Linienintegral der Elektronendichte nach

$$\Delta\varphi = C \cdot \lambda \int n_e dl . \quad (5.21)$$

Das führt mit Unterscheidung der beiden Wellenlängen λ_1 und λ_2 und Gleichung (5.20) nach [Giu10] zu:

$$\Delta\varphi_{mess1} = \frac{2\pi\delta s}{\lambda_1} + C \cdot \lambda_1 \int n_e dl \quad \Delta\varphi_{mess2} = \frac{2\pi\delta s}{\lambda_2} + C \cdot \lambda_2 \int n_e dl \quad (5.22)$$

Daraus folgt für das Linienintegral

$$\int n_e dl = \frac{\Delta\varphi_{mess1} \cdot \lambda_1 - \Delta\varphi_{mess2} \cdot \lambda_2}{C(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}. \quad (5.23)$$

Dabei muss beachtet werden, dass die Wellenlängen so gewählt werden, dass die beiden Messsignale in Bezug auf die Messgenauigkeit unterscheidbar bleiben.

5.4 Beschreibung des Testverfahrens

Das nachfolgend beschriebene Testverfahren ist von der Grundidee aus [AKON10b] beziehungsweise [AYK⁺13] übernommen worden. Anstatt das Interferometer direkt am Plasmastripper einzusetzen, ist es zunächst an einem Testobjekt getestet worden. Die Ziele dieser Tests sind es gewesen, das grundlegende Funktionsprinzip darzustellen, etwaige Fehlerquellen zu eliminieren und das reale Verhalten des Interferometers im Vorfeld zu studieren.

Ein solcher Test lässt sich prinzipiell recht einfach gestalten, weil lediglich ein Objekt benötigt wird, das auf Grund eines von Eins verschiedenen Brechungsindex eine Phasenverschiebung erzeugt. Dies kann zum Beispiel ein Stück Glas sein. Um einen sinnvollen Test zu konzipieren, der zeigt, wie genau das Interferometer die Phasenverschiebung wiedergeben kann, wird ein Glaskeil verwendet, der vom Hersteller einen festgelegten, mit einem Fehler behafteten Winkel besitzt. Diesen Winkel gilt es im Testverfahren messtechnisch zu reproduzieren.

5.4.1 Statische Keilvermessung

In Abbildung (5.14), die den Keil von der Seite zeigt, wird die geometrische Grundlage des Testverfahrens veranschaulicht.

Der Keil wird dabei beispielsweise von unten nach oben gescannt, wobei repräsentativ in Abbildung (5.14) nur zwei Strahlen dargestellt sind. Der erste Strahl dient als Referenzstrahl, der eine Phase φ_1 besitzt. Nach einem gewählten Scaninkrement Δx wird ein weiterer Messpunkt aufgenommen. Auf Grund des gesuchten Winkels α muss der nächste Strahl eine geometrische Weglänge von Δl zusätzlich zurücklegen, was zur Phase φ_2 führt. Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ist nach Formel (3.39) gegeben:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \int (N - 1) dl$$

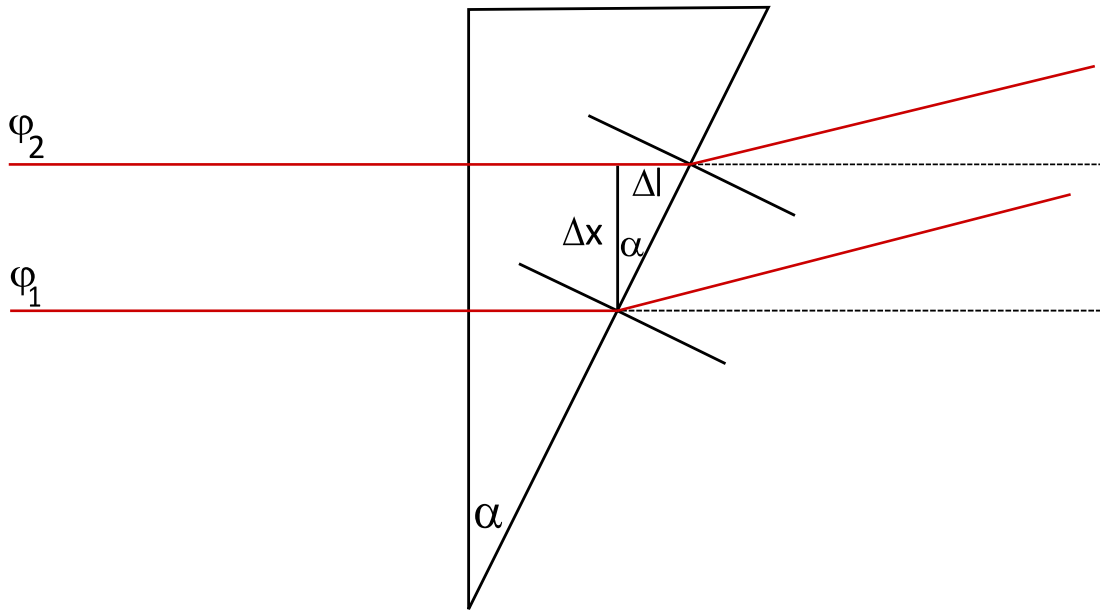


Abbildung 5.14: Geometrische Grundlage des Testverfahrens

Da der Brechungsindex im Keil als konstant angesehen werden kann, lässt sich das Integral direkt nach Gleichung (3.38) auswerten

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (N - 1) \Delta l .$$

Durch den trigonometrischen Zusammenhang zwischen Δx und Δl ergibt sich

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (N - 1) \tan(\alpha) \Delta x . \quad (5.24)$$

Gleichung (5.24) liefert einen linearen Zusammenhang zwischen Phasendifferenz $\Delta\varphi$ und Scaninkrement Δx . Um eine Phasenverschiebung von Messpunkt zu Messpunkt von maximal 2π zu erzeugen, ist folgende Ungleichung zu beachten:

$$\tan(\alpha) \Delta x < 1,21 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (5.25)$$

Um Bedingung (5.25) zu erfüllen, ist ein Scaninkrement von $< 17,8 \mu\text{m}$ sinnvoll, da der verwendete Keil einen Winkel $\alpha_0 = 3^\circ 53'$ besitzt.

Bei der Durchführung dieses Testverfahrens treten allerdings zwei Probleme auf. Einerseits erzeugt der Keil eine Strahlableitung, die die Symmetrie des Interferometers derart stört, dass die Interferenz nur sehr schwer oder gar nicht herstellbar ist und andererseits kann es bei nicht exakter Ausrichtung des Keils dazu kommen, dass von einem falschen

Scaninkrement Δx ausgegangen wird. Um das erste Problem zu lösen, ist ein zweiter, gleichartiger Keil eingesetzt worden, der die Symmetrie durch ortsfesten Einsatz im zweiten Strahlarm wieder herstellt. Zur Lösung des zweiten Problems dient Abbildung (5.15), die den Keil von vorne zeigt:

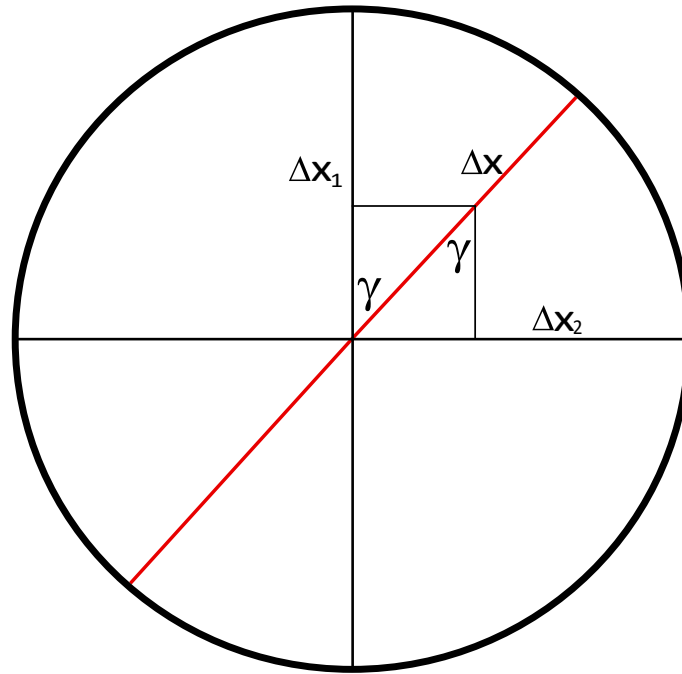


Abbildung 5.15: Geometrische Überlegung zur Keilausrichtung

Angenommen, die gewählte Scanstrecke Δx_1 weicht von der optimalen Scanstrecke Δx um den gezeigten Winkel γ ab, dann führt das zu einem fälschlicherweise zu klein angenommenem Scaninkrement nach

$$\Delta x_1 = \Delta x \cdot \cos(\gamma) . \quad (5.26)$$

Dies führt in Gleichung (5.24) zu einem zusätzlichen Faktor $\cos(\gamma)$, der von unbekannter Größe ist. Wird der Keil um 90° gedreht, wodurch der Pfad Δx_2 benutzt wird, ergibt sich

$$\Delta x_2 = \Delta x \cdot \sin(\gamma) . \quad (5.27)$$

Mit der Durchführung des Messvorgangs im ursprünglichen und im um 90° gedrehten Zustand, lassen sich die Faktoren $\cos(\gamma)$ und $\sin(\gamma)$ eliminieren. Beide Messungen liefern Regressionssteigungen m_1 und m_2

$$m_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (N - 1) \tan(\alpha) \cos(\gamma) \quad m_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (N - 1) \tan(\alpha) \sin(\gamma) , \quad (5.28)$$

deren quadratische Addition den Winkel α bestimmbar macht:

$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (N - 1)^2 \tan^2(\alpha) \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \lambda}{2\pi(N - 1)}\right) \quad (5.29)$$

Problematisch an der statischen Variante des Testverfahrens ist, dass die Messungen extrem unter Vibrationen leiden könnten. Im Idealfall keiner vorherrschenden Vibrationen sollten, auf Grund der im statischen Fall konstanten Phasenverschiebung, zwei konstante Spannungen pro Messpunkt vom I/Q-Demodulator ausgegeben werden. Es ist fraglich, mit welchem Aufwand eine mechanische Vibrationskompensation installiert werden kann, damit brauchbare Ergebnisse erzielt werden können. Außerdem ist eine Vibrationskompensation nach Kapitel 5.3.2 ausgeschlossen, da für die Kompensation die eigentliche Messphase und die Vibrationsphase verschiedene Abhängigkeiten bezüglich der Wellenlänge aufweisen müssen. Wie in Gleichung (3.39) und (5.20) zu sehen ist, ist aber die Wellenlängenabhängigkeit bei der Keilphase und der Vibrationsphase identisch.

5.4.2 Dynamische Keilvermessung

Die dynamische Keilvermessung hat das Ziel, die Vibrationen durch einen bewegten Scanningvorgang zu umgehen beziehungsweise ihren Einfluss zu minimieren. Die Bewegung muss zwei Eigenschaften aufweisen:

- ausreichende Geschwindigkeit
- Beibehaltung der Justage

Das bedeutet, die Bewegung, die eine zeitabhängige Phasenverschiebung erzeugt, muss derartig schnell ablaufen, dass die Vibrationsphase innerhalb des Messvorgangs als konstant angenommen werden kann. Des Weiteren darf der Keil während der Bewegung seine Rotationsfreiheitsgrade nicht nutzen, das heißt, er darf sich nicht um seine Mittelpunktsachse drehen und keinerlei Kippungen ausführen, andernfalls würde die Interferenz verloren gehen. Beides lässt sich durch ein Fallexperiment verwirklichen:

Ein elektrischer Haftmagnet wird über einem der Strahlarme mittels eines Stativsystems aufgehängt. Der Keil wird mit seiner Fassung an einem ebenen Stück Eisen angeschraubt und am Haftmagnet angebracht. In dieser Konfiguration wird der Laserstrahl durch den elektromagnetisch aufgehängten Keil justiert.

In den Stromkreis des Haftmagnets wird ein Schalter integriert, dessen Spannungsabfall am Oszilloskop als Triggersignal verwendet wird. Wird der Schalter geöffnet, bricht das

magnetische Feld des Haftmagnets zusammen, die elektromagnetische Aufhängung löst sich und der Keil führt einen freien Fall aus. Diese Anordnung wird in Abbildung (5.16) gezeigt.

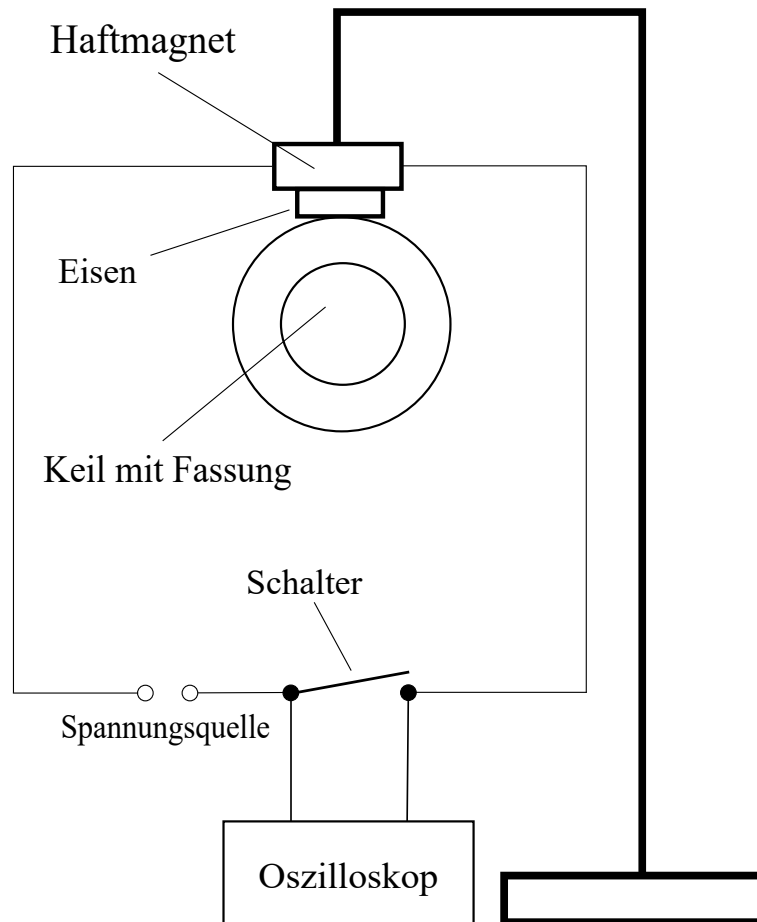


Abbildung 5.16: Schematische Darstellung der elektromagnetischen Aufhängung

Die entscheidenden Bewegungsgleichungen sind die des freien Falls aus einer ruhenden Anfangsposition x_0 heraus mit der Gravitationsbeschleunigung g :

$$\ddot{x}(t) = g \quad (5.30)$$

$$\dot{x}(t) = g \cdot t \quad (5.31)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + x_0 \quad (5.32)$$

Damit lässt sich Δx in Gleichung (5.24) ersetzen nach

$$\Delta x \rightarrow \Delta x(t) = x(t) - x_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad (5.33)$$

womit die Auswertungsgleichung lautet:

$$\Delta\varphi(t) = \frac{\pi \cdot g}{\lambda} (N - 1) \tan(\alpha) \cdot t^2 \quad (5.34)$$

Falls eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 vorliegt, wenn zum Beispiel der Messvorgang zum Fallprozess zeitverzögert einsetzt, ergibt sich die Auswertungsgleichung

$$\Delta\varphi(t) = \frac{2\pi}{\lambda} (N - 1) \tan(\alpha) \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t \right). \quad (5.35)$$

Analog zur statischen Keilvermessung kann eine falsche Keilachsenausrichtung (γ -Fehler) durch zwei um 90° zueinander gedrehte Messungen korrigiert werden. Es treten die gleichen Sinus- und Kosinusfaktoren wie in Gleichung (5.26) und (5.27) auf, womit bei Benutzung dieser Korrekturmethode, die hier im dynamischen Fall zwei Parabelöffnungen C_1 und C_2 liefert, die Auswertungsgleichung für den Keilwinkel α folgende Form besitzt:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \lambda}{\pi g (N - 1)} \right) \quad (5.36)$$

5.4.3 Weitere geometrische Überlegungen zur Keilausrichtung

Laut Hersteller soll der Keil, der einen Winkel von $\alpha_0 = 3^\circ 53'$ besitzt, eine Strahlablenkung von $2^\circ \pm 30''$ erzeugen. Demnach lautet der Keilwinkel mit Fehler im Dezimalsystem:

$$\alpha_0 = (3,883 \pm 0,017)^\circ \quad (5.37)$$

Das bedeutet, dass das Interferometer im Idealfall mit den oben genannten Achsenkorrekturen Ergebnisse liefern sollte, die alle innerhalb des Fehlers von α_0 liegen sollten. Es sind allerdings verschiedene Situationen denkbar, bei denen das Messergebnis sowohl nach unten, als auch nach oben abweichen könnte. Diese Abweichungen entstehen, wenn der Laserstrahl nicht senkrecht zur Keiloberfläche auftrifft. Hier lassen sich zwei Fälle unterscheiden, die allerdings in Kombination auftreten können:

- **ϵ -Fehler**

Falls der Laserstrahl nicht senkrecht auf die Keiloberfläche trifft, sondern um einen Winkel ϵ davon abweicht und Einfallslot und Laserstrahl eine Ebene parallel zur

Fallrichtung bilden, wird als Messergebnis nicht mehr der eigentliche Winkel α bestimmt. Dies zeigt Abbildung (5.17):

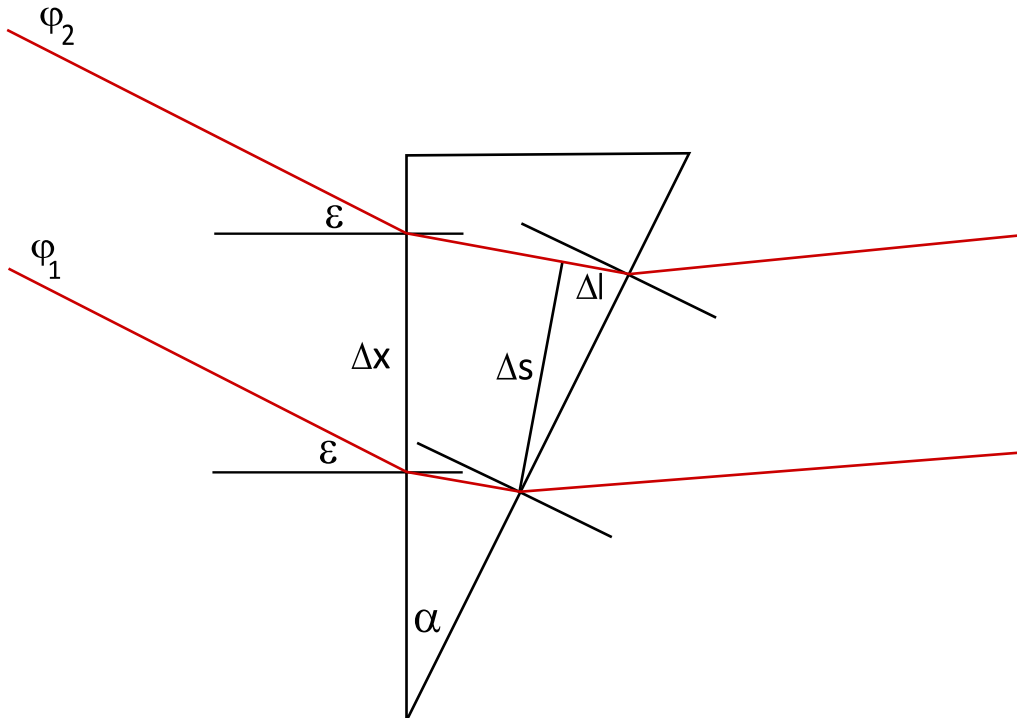


Abbildung 5.17: Geometrische Überlegungen zum ϵ -Fehler

Durch einfache geometrische Zusammenhänge lässt sich die Auswertungsformel (5.35) wie folgt umformulieren:

$$\Delta\varphi(t) = \frac{2\pi}{\lambda} (N - 1) \tan \left(\alpha - \arcsin \left(\frac{\sin(\epsilon)}{N} \right) \right) \sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\epsilon)}{N} \right)^2} \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t \right) \quad (5.38)$$

- **δ -Fehler**

Hier weicht der Laserstrahl um den Winkel δ vom Einfallslot ab und zwar so, dass Einfallslot und Laserstrahl eine Ebene senkrecht zur Fallrichtung bilden. Abbildung (5.18) schaut von oben in Fallrichtung und zeigt horizontale Schnittbilder des Keils auf Höhe des Laserstrahls zu verschiedenen Zeitpunkten. Dies führt auf folgende modifizierte Auswertungsformel:

$$\Delta\varphi(t) = \frac{2\pi}{\lambda} (N - 1) \tan(\alpha) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\delta)}{N} \right)^2}} \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t \right) \quad (5.39)$$

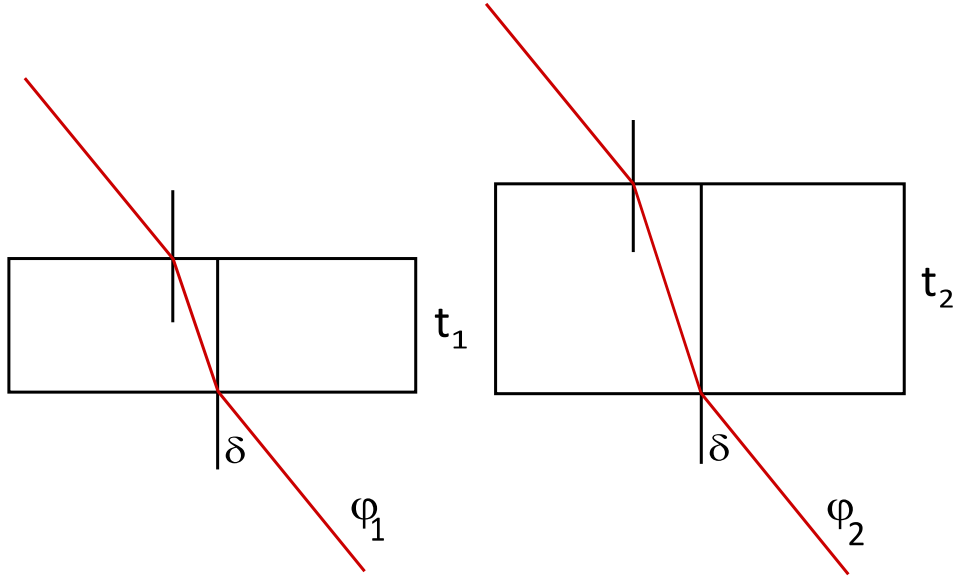


Abbildung 5.18: Geometrische Überlegungen zum δ -Fehler

Falls beide Winkelabweichungen vorliegen, lautet die Formel für die Parabelöffnung

$$C(\delta, \epsilon) = \frac{\pi g}{\lambda} (N - 1) \tan \left(\alpha - \arcsin \left(\frac{\sin(\epsilon)}{N} \right) \right) \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\epsilon)}{N} \right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\delta)}{N} \right)^2}}. \quad (5.40)$$

Zur Abschätzung des auf Grund der Winkelabweichungen resultierenden Fehlers der Parabelöffnung lässt sich die 1. Ordnung der Taylorentwicklung von $C(\delta, \epsilon)$ an der Stelle $(0, 0)$ verwenden:

$$C(\delta, \epsilon) = \frac{\pi g}{\lambda} (N - 1) \tan(\alpha) - \frac{\pi g}{\lambda} \frac{N - 1}{N} (1 + \tan^2(\alpha)) \cdot \epsilon = C_0 + \Delta C_{1.Ord} \quad (5.41)$$

Das bedeutet, dass bei Benutzung von C_0 statt Gleichung (5.40) für die Auswertung, ein zusätzlicher Fehler $\Delta C_{1.Ord}$ berücksichtigt werden muss. Dabei könnte α im Vorfeld grob abgeschätzt werden, zum Beispiel mit $\alpha \approx 10^\circ$, und mit $\epsilon \approx 1^\circ$ würde dieser Fehler betragsmäßig einen Wert von $\Delta C_{1.Ord} = 0,300 \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2$ annehmen. Dieser beispielhaft berechnete Fehler liegt bei 17,5% der zu erwartenden Parabelöffnung. Daher muss bei der Justage besonderen Wert auf einen minimalen ϵ -Fehler gelegt werden. Ein vorhandener δ -Fehler wiegt im Verhältnis deutlich weniger, da er erst in 2. Ordnung auftritt. Wahrscheinlich ist es ausreichend den ϵ -Fehler dadurch zu begrenzen, dass der Reflexionsstrahl an der Keiloberfläche kontrolliert wird und der Laserstrahl so geführt wird, dass Einfallstrahl und Reflexionsstrahl übereinander liegen. Daneben gibt es allerdings eine messtechnische Lösung:

$\Delta C_{1,Ord}$ ist bezüglich ϵ punktsymmetrisch zum Ursprung, sodass eine um 180° gedrehte Korrekturmessung und anschließende Mittelwertbildung zur ursprünglichen Messung diese Winkelabweichung eliminieren kann. Das heißt, dass insgesamt vier um 90° gedrehte Messungen alle Winkelfehler in sehr guter Näherung beseitigen. Dieses Korrekturschema wird in Abbildung (5.19) veranschaulicht.

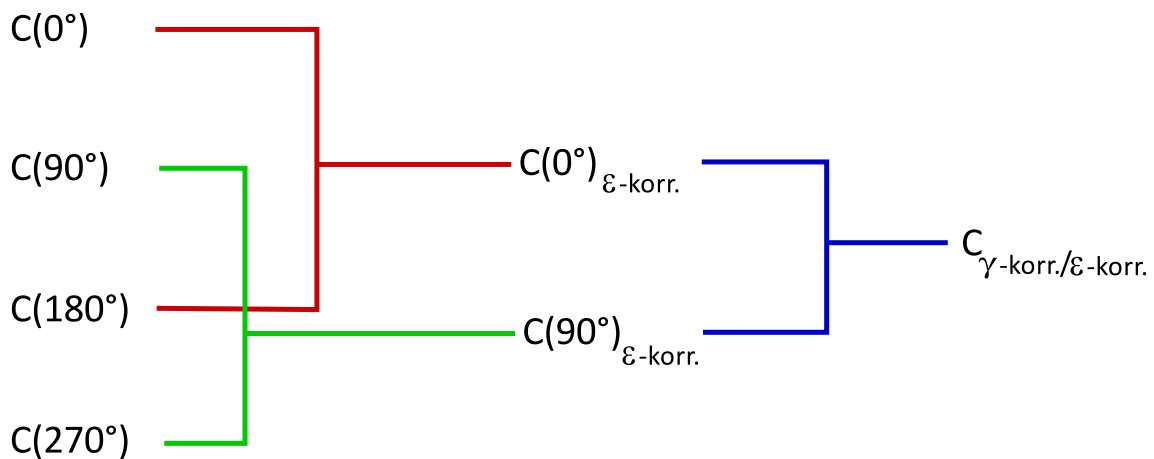


Abbildung 5.19: Korrekturschema für die Winkelfehler γ und ϵ

Dabei ist es unerheblich, ob die Korrekturmessungen in positiver oder negativer Richtung eingestellt werden. Zwar würde in einem Fall die Parabelöffnung der 90° -Messung beziehungsweise 270° -Messung das falsche Vorzeichen aufweisen, aber durch die Symmetrie des Keils ist der Betrag mit den in richtiger Richtung eingestellten Korrekturmessungen identisch.

6 Messergebnisse und Auswertung

6.1 Kalibrierungsverfahren des I/Q-Demodulators

Da der I/Q-Demodulator, wie in Kapitel 5.2.4 beschrieben, aus Einzelteilen zusammengesetzt worden ist, sind seine Eigenschaften weitestgehend aus den Eigenschaften der Einzelteile bestimmt. Allerdings sind gegenseitige Beeinflussungen der Einzelteile beziehungsweise deren Einfluss auf die Gesamtleistung unbestimmt. Hier spielen vor allem Amplituden- und Phasenfehler, aber auch ein möglicherweise vorhandenes DC-Offset eine Rolle. Wie bereits beschrieben, entstehen Amplituden- und Phasenfehler aus Asymmetrien im Aufbau der Leistungsteiler und der Mischer, sowie der dazugehörigen Verbindungen und Kabel. Das DC-Offset entsteht durch eine nicht perfekte Isolation der Mischerports, sodass ein Signal aus LO oder RF, bei gleichzeitigem Abschluss des jeweils anderen Ports, in die Ausgänge I/Q gerät. Daher ist in Anlehnung an [SL98] eine Kalibriermethodik eingeführt worden.

Gemäß den Gleichungen (5.13) und (5.14) liegt bei einer zeitabhängigen Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \Delta\varphi(t)$ jeder Messpunkt P mit

$$P = \begin{pmatrix} R \cos(\Delta\varphi(t_P)) \\ R \sin(\Delta\varphi(t_P)) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius $R = A_1 A_2 / 2$. Durch DC-Offset c , Amplitudenfehler k und Phasenfehler α modifizieren sich Gleichungen (5.13) und (5.14) mit $K = R + k$ zu:

$$U_I = U_a^* = K_I \cdot \cos(\Delta\varphi + \alpha_I) + c_I \quad (6.2)$$

$$U_Q = U_b^* = K_Q \cdot \sin(\Delta\varphi + \alpha_Q) + c_Q \quad (6.3)$$

Hierbei führt das DC-Offset zu einer Verschiebung des Kreiscentrums, die Amplitudenfehler zu einer Deformierung des Kreises in eine Ellipse, deren Halbachsen auf den Koordinatenachsen liegen, und die Phasenfehler zu einer weiteren Streckung mit zusätzlicher Rotation um den Halbachsenschnittpunkt. Dabei ist allerdings nur die Imbalance $\beta = \alpha_Q - \alpha_I$ entscheidend, da α_I in die Anfangsphase von Gleichung (5.16) absorbiert werden kann. Abbildung (6.1) veranschaulicht die genannten Fehler graphisch.

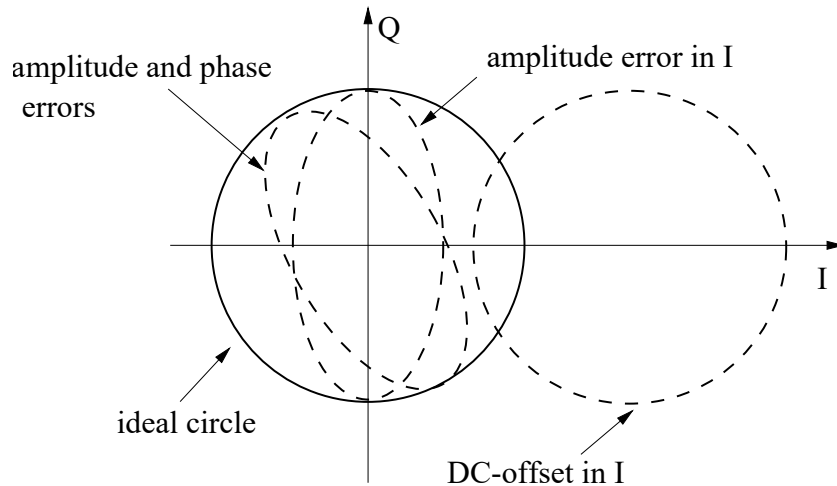


Abbildung 6.1: Auswirkungen der Fehler des I/Q-Demodulators [SL98]

Da trotz der genannten Fehler alle Messwerte auf der erwähnten Ellipse liegen und deren Schwankungen aus statistischen Fehlern wie Rauschen entstehen, können die Messdaten mit einem elliptischen Fit angepasst werden. Nach Absorption von α_I in die Anfangsphase lautet das Messsignal

$$\begin{pmatrix} U_I \\ U_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_I & 0 \\ 0 & K_Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\Delta\varphi) \\ \sin(\Delta\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_I \\ c_Q \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Ziel ist es, die Parameter K_I , K_Q , β , c_I und c_Q so anzupassen, dass die quadratischen Abweichungen des Messsignals zum gesuchten Vektor $(\cos(\Delta\varphi), \sin(\Delta\varphi))$ minimal werden.

Die implizite Darstellung der gedrehten Ellipse, die als Fit-Funktion dient, lautet:

$$\left(\frac{x - c_I}{K_I}\right)^2 + \left(\frac{-\tan(\beta)(x - c_I) + \sec(\beta)(y - c_Q)}{K_Q}\right)^2 = 1 \quad (6.5)$$

Die Korrektur der Messdaten $(x, y) = (U_I, U_Q)$ erfolgt durch Auflösen von Gleichung (6.4) nach $(\cos(\Delta\varphi), \sin(\Delta\varphi))$ und Einsetzen der Fit-Parameter.

Im Folgenden soll dieses Verfahren beispielhaft gezeigt werden. Dabei ist die Zeitabhängigkeit der Phasenverschiebung durch mechanische Verformung des optischen Tisches hervorgerufen worden. Durch Druck auf den optischen Tisch zwischen Strahlteiler und Spiegel und anschließender Entspannung hat sich die relative geometrische Weglänge der Strahlarme verändert. Erwartungsgemäß sollte sich bei Druck auf dieser Stelle die relative geometrische Weglänge verkürzen, sodass eine negative Phasenverschiebung gemessen wird. Die Entspannung sollte durch einem Phasenanstieg gekennzeichnet sein.

Abbildung (6.2) zeigt die Rohdaten dieser Messung, die zur Übersichtlichkeit ohne Fehler gezeigt sind:

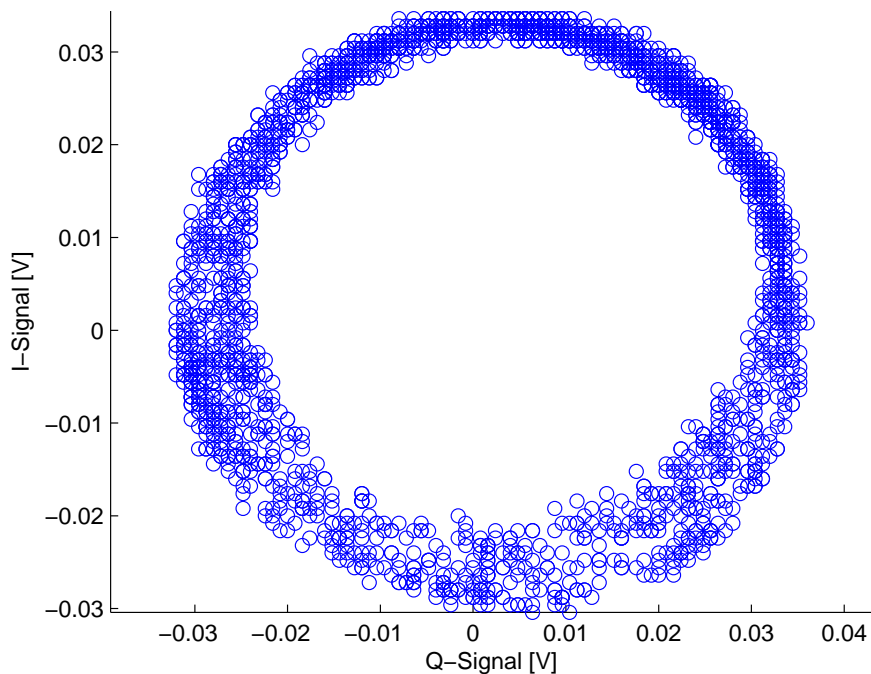


Abbildung 6.2: Rohdaten, Beispielmessung

Offensichtlich weichen die Daten in Abbildung (6.2) von einem idealen Kreis deutlich ab. Am deutlichsten lässt sich einerseits erkennen, dass die Amplitude des I- beziehungsweise Q-Signals lediglich bei circa 0,035 V liegt und andererseits, dass das Ellipsenzentrum vom Nullpunkt des Koordinatensystems abweicht.

Abbildung (6.3) zeigt die nach Gleichung (6.4) auf den in rot gekennzeichneten Einheitskreis transformierten Daten. Es ist zu erkennen, dass es durch das Rauschen eine deutliche Streuung der Daten um den Einheitskreis gibt.

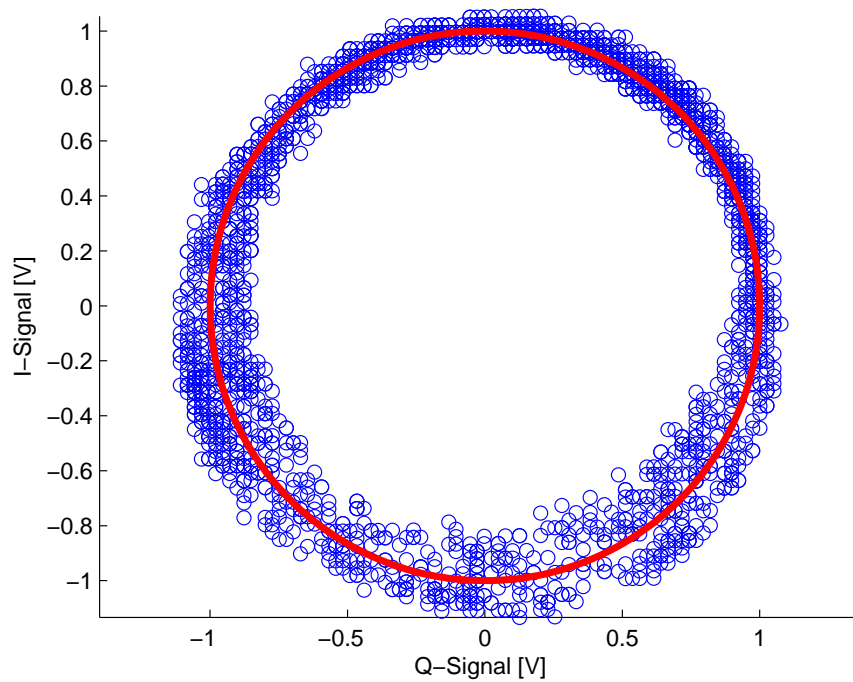


Abbildung 6.3: Transformierte Daten, Beispielmessung

Die Auswertung der Daten nach Gleichung (5.18) liefert die Rohdaten der Phasenverschiebung, die in Abbildung (6.4) dargestellt sind.

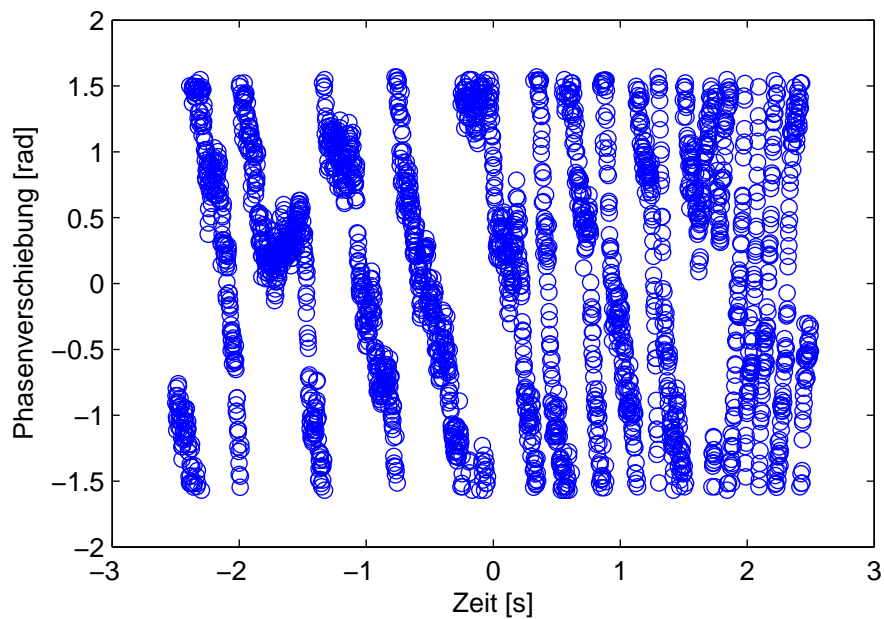


Abbildung 6.4: π -periodische Rohdaten der Phasenverschiebung, Beispielmessung

Zu erkennen sind π -periodische Phasensprünge, die von der Beschränktheit des Wertebereichs des Arkustangens in Gleichung (5.18) herrühren. Unter Beachtung der Vorzeichen von U_a und U_b beziehungsweise U_I und U_Q ergibt sich eine Rohphasenverschiebung, die dann 2π -periodische Phasensprünge aufweist und in Abbildung (6.5) veranschaulicht ist.

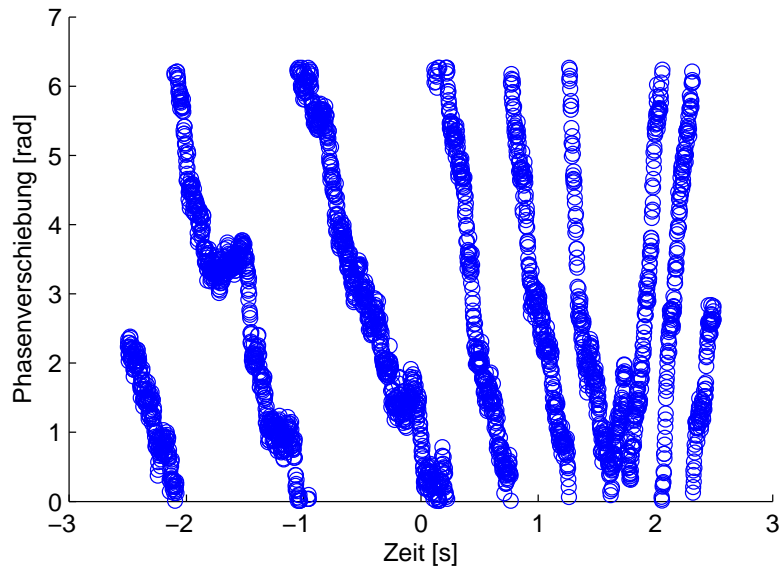


Abbildung 6.5: 2π -periodische Rohdaten der Phasenverschiebung, Beispielmessung

Abbildung (6.6) hebt zusätzlich die Richtung der Phasenverschiebung (schwarze Geraden) und die Richtungsumkehr (rote Linie) hervor.

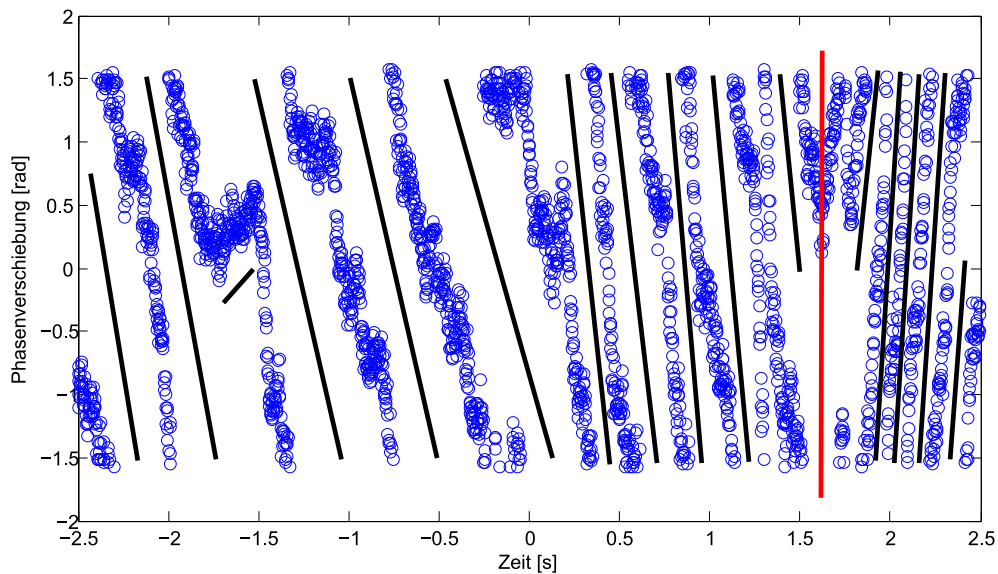


Abbildung 6.6: Interpretierte Rohdaten der Phasenverschiebung, Beispielmessung

Die fallenden Geraden stehen für eine fallende Phasenverschiebung, die ansteigenden Geraden entsprechend für eine ansteigende Phasenverschiebung. Eine zeitlich kontinuierliche Fortsetzung, die aus den π -periodischen Rohdaten der Phasenverschiebung erstellt worden ist, wird in Abbildung (6.7) gezeigt.

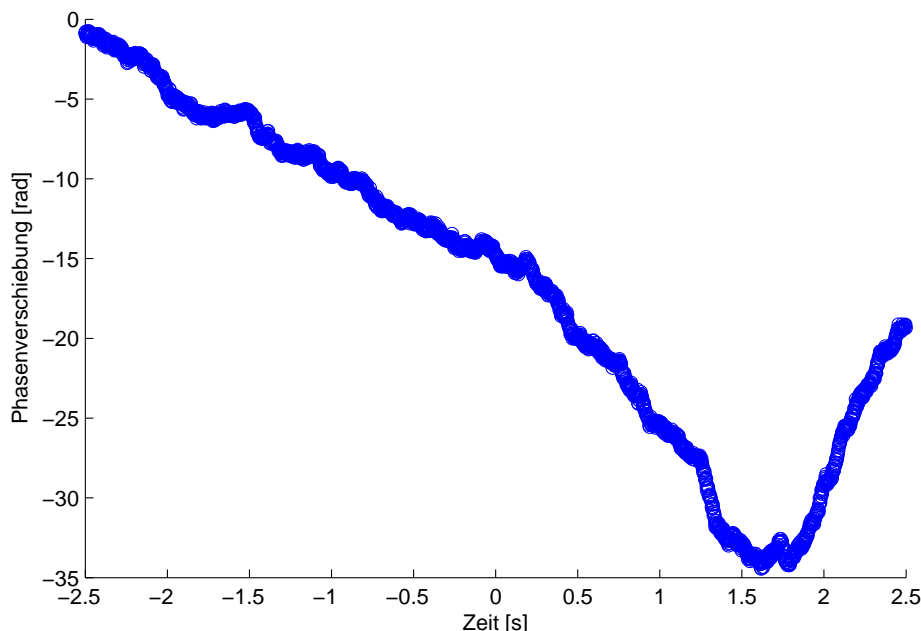


Abbildung 6.7: Zeitlich kontinuierlich fortgesetzte Phasenverschiebung, Beispielmessung

Falls es nicht auf die absoluten Werte der Phasenverschiebung ankommt, sondern lediglich ein bestimmter Fitparameter aus den Messkurven ermittelt werden soll, könnte die Rohphasenverschiebung mit π -periodischen Phasensprüngen für eine zeitlich kontinuierliche Fortsetzung herangezogen werden. Dadurch wird zwar ein systematischer Fehler erzeugt, der aber nur einer Verschiebung der Messkurve in y-Richtung entspricht und gewisse Fitparameter unverändert lässt.

Bei Messungen, bei denen mit absoluten Werten der Phasenverschiebung gearbeitet werden muss, muss zwingend die 2π -periodische Rohphasenverschiebung berechnet und diese zur Vermeidung eines systematischen Fehlers zeitlich kontinuierlich fortgesetzt werden.

Für alle Ergebnisse in den nachfolgenden Auswertungen des dynamischen Messverfahrens ist die π -periodische Rohphasenverschiebung verwendet worden. Dies begründet sich darauf, dass der viel effizientere Matlab-Code der 2π -periodischen Rohphasenverschiebung erst nach der kompletten Auswertung entdeckt worden ist, aber im Rahmen dieser Arbeit, wie oben angesprochen, nur ein Fitparameter, die Parabelöffnung, ermittelt wird, auf den der gemachte systematische Fehler keine Auswirkung hat.

6.2 Ergebnisse der statischen Keilvermessung

Der erste Versuch den Keilwinkel zu bestimmen hat auf dem statischen Messverfahren basiert. Die Messungen sind jedoch in Hinblick auf den offensichtlich extremen Vibrations-einfluss in der Anfangsphase abgebrochen und nicht weiter verfolgt worden. Beispielhaft sind in Abbildung (6.8) die Oszilloskopanzeigen zu zwei verschiedenen Messintervallen bei identischer Justage dargestellt. Die Messzeit beträgt in etwa 45-50 s. Da bei diesen Messungen der elliptische Verlauf in den Rohdaten nicht sichtbar ist, ist die Kalibrierung nach Kapitel 6.1 nicht durchgeführt worden.

Zur Vereinfachung und Demonstration sind nur Fehler der Phasenverschiebung berücksichtigt worden, wogegen der Zeitbasisfehler ausgelassen worden ist. In Abbildung (6.9) sind die dazugehörigen Datenanpassungen gezeigt, wobei gemäß den Erwartungen ein horizontaler Fit mit einem ODR-Algorithmus (orthogonal distance regression) ohne Fehl-ergewichtung durchgeführt worden ist.

Die Phasenverschiebungen gemäß Abbildung (6.9) lauten

$$\Delta\varphi_1 = (-0,480 \pm 0,010) \text{ rad}$$

beziehungsweise

$$\Delta\varphi_2 = (0,925 \pm 0,009) \text{ rad} .$$

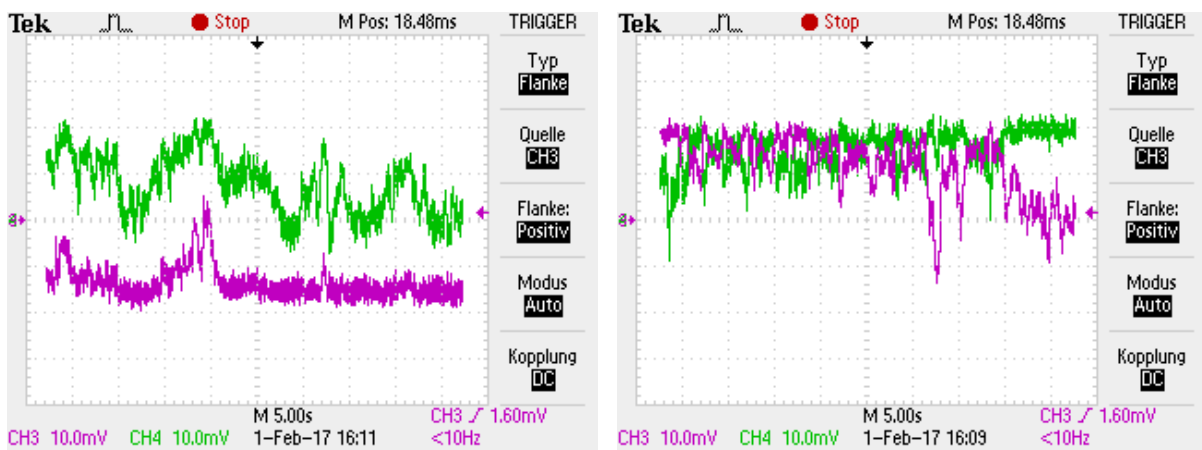


Abbildung 6.8: Oszilloskopanzeige, statisches Messverfahren

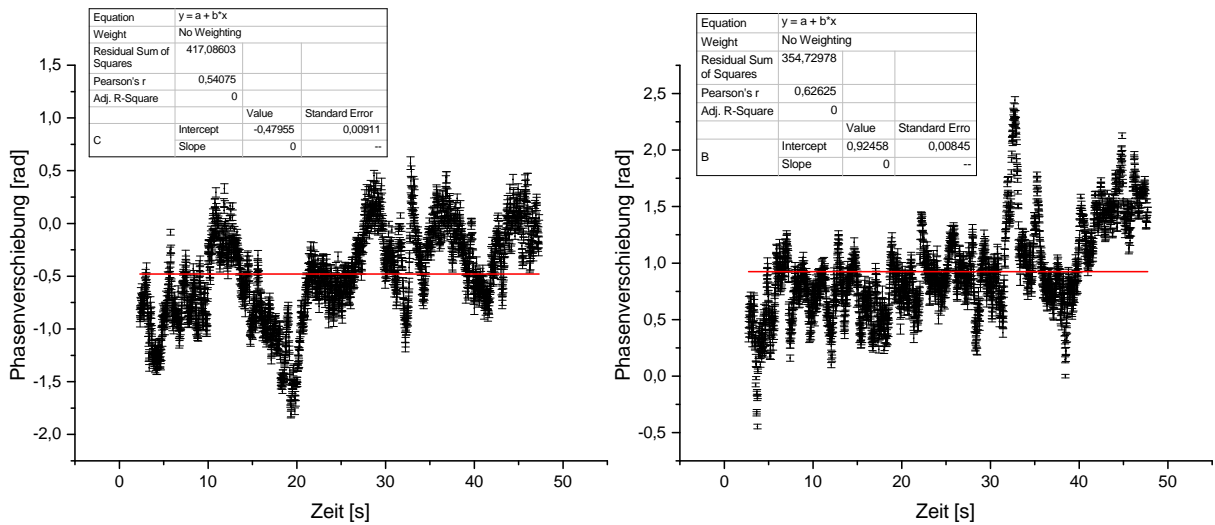


Abbildung 6.9: Datenanpassung, statisches Messverfahren

6.3 Ergebnisse der dynamischen Keilvermessung, Messreihe 1

Es sind zunächst Fallmessungen durchgeführt worden, bei denen der Oszilloskoptrigger nicht mit dem Startzeitpunkt der Fallbewegung synchronisiert gewesen sind, sondern mit einer unbekanntem Zeitverzögerung eingesetzt hat. Die Folge ist, dass die Phasenverschiebung in einem Bereich der Parabel aufgezeichnet worden ist, wo der Krümmungsradius sehr groß ist und die Parabel daher einen geradenähnlichen Verlauf besitzt. Außerdem sind weder Keilachsenkorrekturmessungen durchgeführt, noch Winkelabweichungen zur optimalen Keilausrichtung untersucht worden.

6.3.1 Messung 1: Zeitverzögert, Messzeit 9 ms

Bei dieser Messung ist mit dem Oszilloskop eine Zeitspanne von 9 ms aufgezeichnet worden. Die Rohdaten des I/Q-Demodulators und die transformierten Daten sind in den Abbildungen (6.10) und (6.11) gezeigt.

Die Spannungsfehler, die vom Oszilloskop (TDS 2024C) herrühren, sind hier und im Folgenden 3% des Messwerts und zusätzlich 8 Bit des eingestellten Messbereichs. Die Zeitbasis besitzt einen Fehler von 50 ppm.

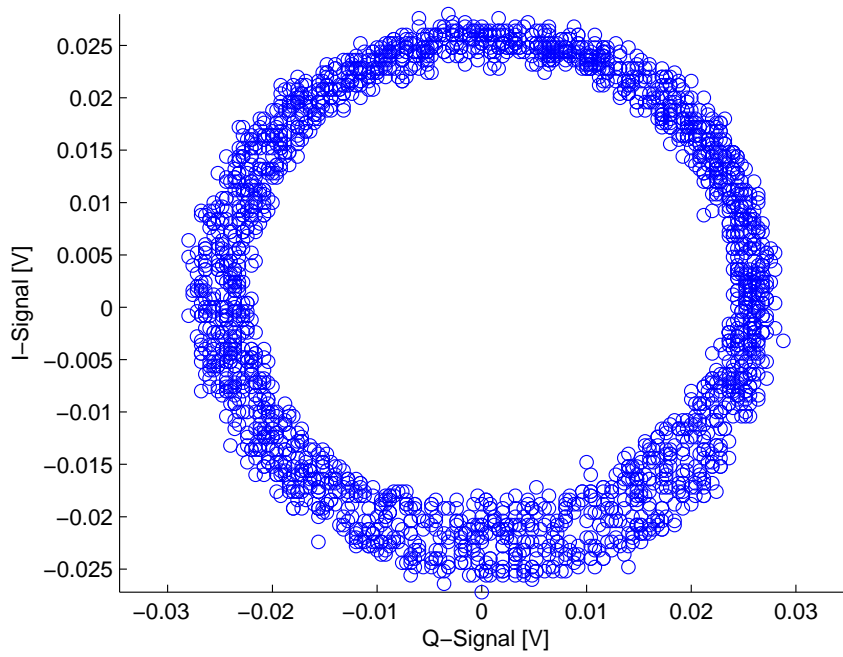


Abbildung 6.10: Rohdaten, Messung 1

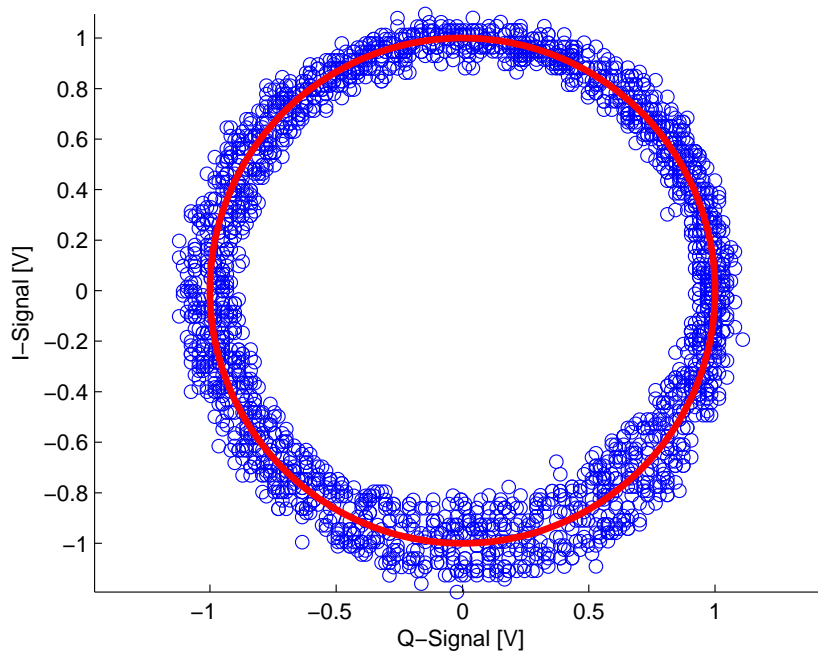


Abbildung 6.11: Transformierte Daten, Messung 1

Die ungerundeten, mit Origin erstellten Fitparameter nach Gleichung (6.5) sind in Tabelle (6.1) dargestellt.

	K_I/V	K_Q/V	x_c/V	y_c/V	β/rad
Wert	0,02544862	0,02411779	$5,524568 \cdot 10^{-4}$	0,001564143	0,002989702
Fehler	$6,075716 \cdot 10^{-5}$	$6,628869 \cdot 10^{-5}$	$5,355659 \cdot 10^{-5}$	$4,897089 \cdot 10^{-5}$	$3,917437 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 6.1: Fitparameter, Messung 1

Die weitere Auswertung erfolgt durch Anpassung der Daten an eine Parabel mit dem Programm Origin. Es stehen verschiedene Iterationsalgorithmen zur Verfügung, die leicht voneinander abweichende Ergebnisse liefern. Auch die Art der Fehlergewichtung hat einen Einfluss auf die Fitparameter. Es ist entschieden worden, im Folgenden, falls nicht anders vermerkt, einen ODR-Algorithmus ohne Fehlergewichtung zu benutzen. Unter Beachtung des minimalen χ^2 und insbesondere des R -Werts (goodness of fit), sind andere Gewichtungen berücksichtigt worden, die aber nur bei deutlich besserem Fitergebnis genannt werden.

Wie in Abbildung (6.12) zu sehen ist, gilt für den Fitparameter C :

$$C = (1,7207 \pm 0,0010) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2$$

Da keine Achsenkorrekturmessung durchgeführt worden ist, folgt nach

$$\alpha = \arctan \left(\frac{C \cdot \lambda}{\pi g (N - 1)} \right) \quad (6.6)$$

für den Keilwinkel α :

$$\alpha = (3,9257 \pm 0,0002)^\circ$$

Die weiteren eingesetzten Größen lauten hier und im Folgenden:

$$\lambda = (632,8 \pm 0,3) \text{ nm}$$

$$(N - 1) = (0,5148 \pm 0,0004)$$

(unter Berücksichtigung des Luftbrechungsindex $N_{Luft} = 1,0003$)

$$g = (9,811 \pm 0,005) \text{ m/s}^2$$

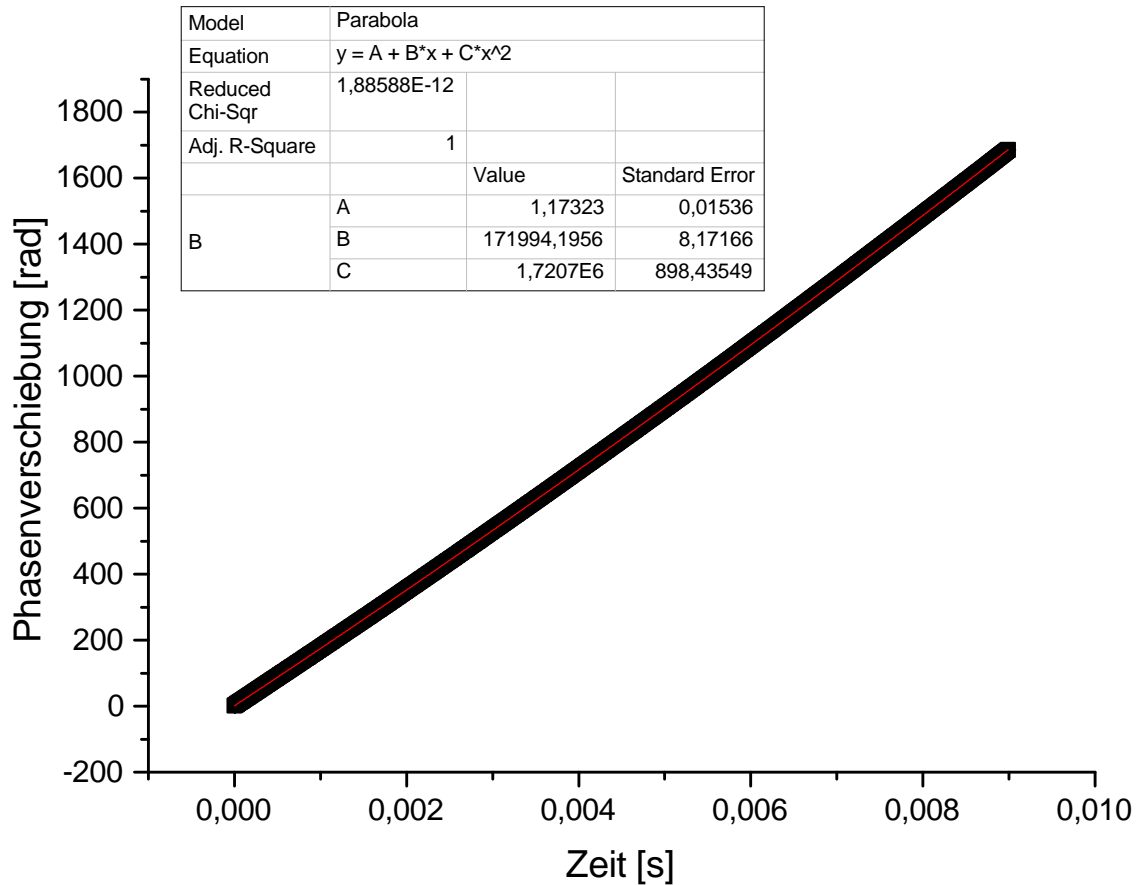


Abbildung 6.12: Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 1

6.3.2 Messung 2: Zeitverzögert, Messzeit 5 ms

Diese Messung ist analog zur ersten Messung erfolgt, sodass hier nur der parabolische Fit als Endergebnis stehen soll. Lediglich abweichend ist die Messzeit mit 5 ms.

Der relevante Fitparameter nach Abbildung (6.13) beläuft sich auf

$$C = (1,7302 \pm 0,0035) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2 .$$

Daraus folgt

$$\alpha = (3,9473 \pm 0,0003)^\circ .$$

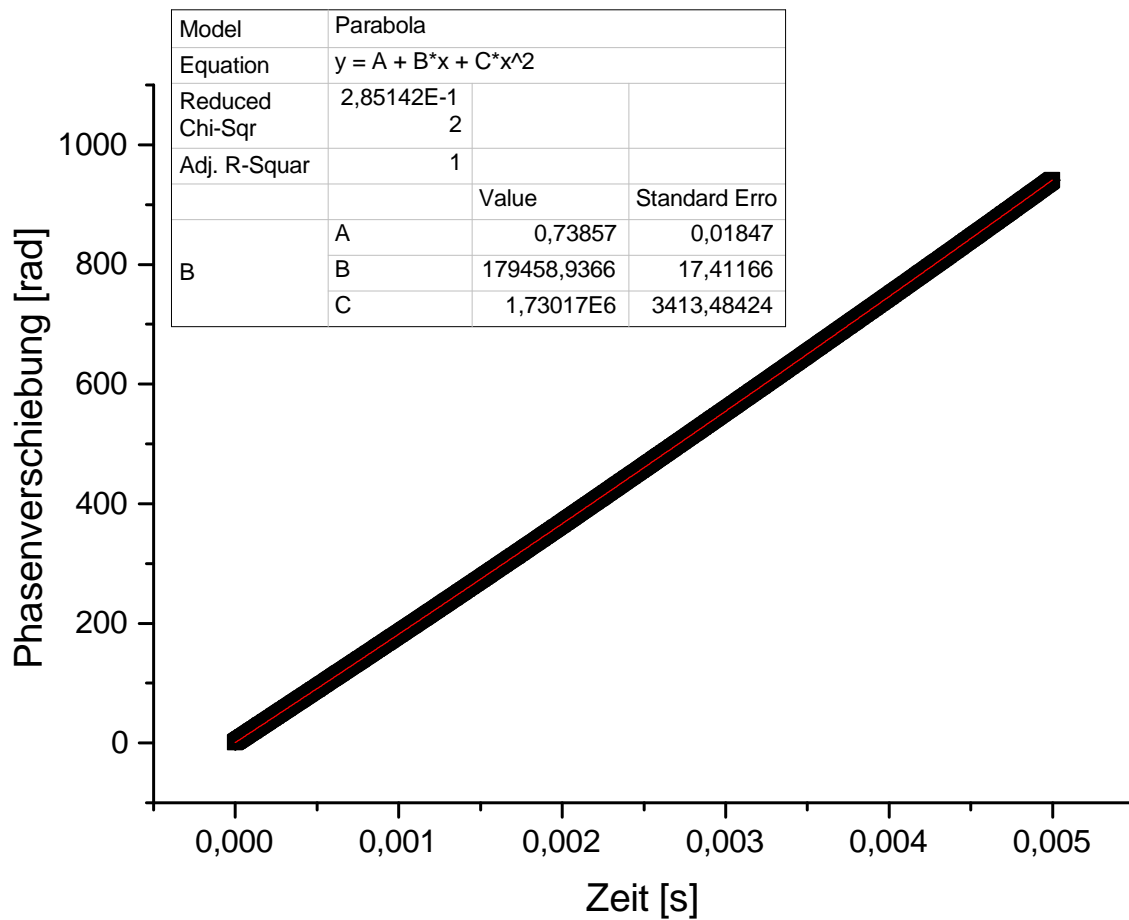


Abbildung 6.13: Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 2

6.3.3 Messung 3: Zeitverzögert, Messzeit 6 ms

Bei dieser Messung ist ein Zeitintervall von 6 ms aufgezeichnet worden.

Der relevante Fitparameter in Abbildung (6.14) ist

$$C = (1,7219 \pm 0,0065) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2 .$$

Daraus folgt

$$\alpha = (3,9284 \pm 0,0004)^\circ .$$

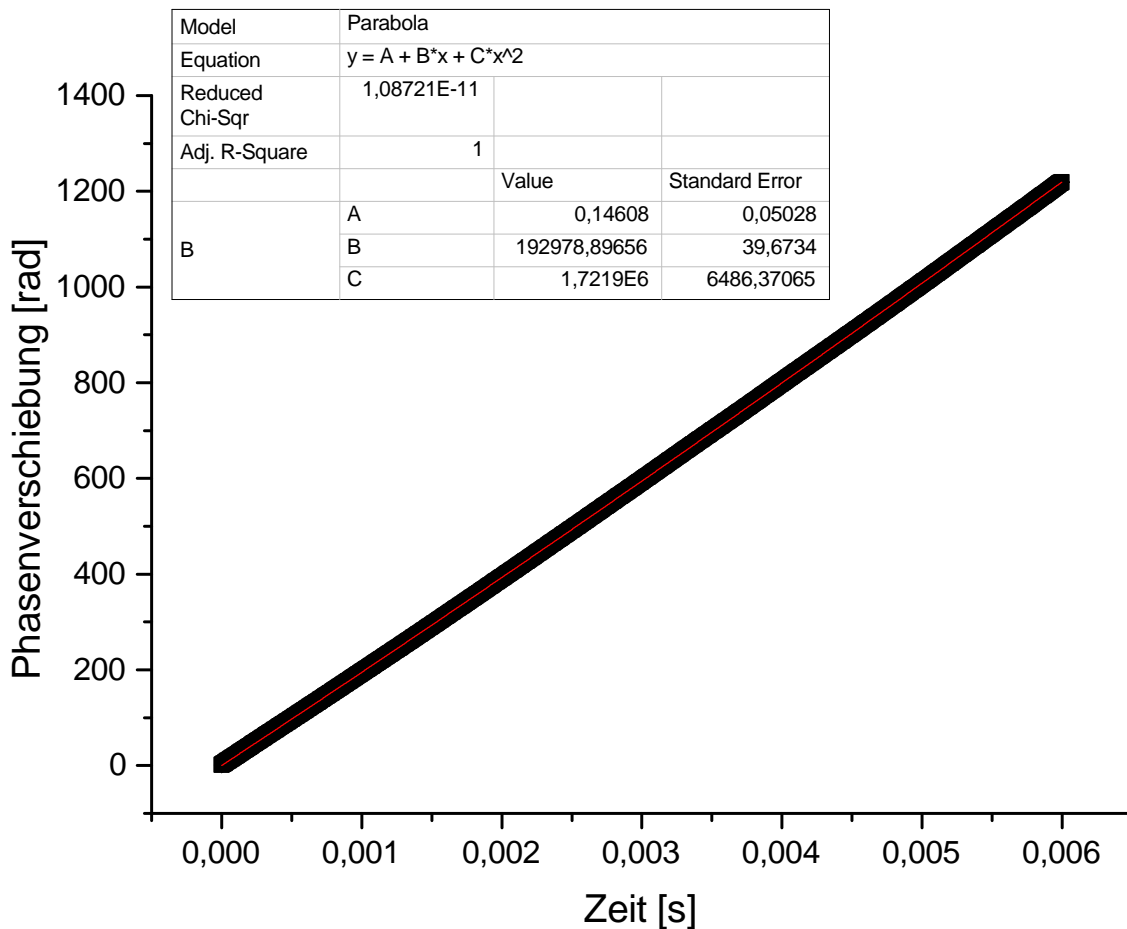


Abbildung 6.14: Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 3

6.3.4 Messung 4: Zeitverzögert, Messzeit 4,5 ms

Diese Messung, bei der ein Zeitintervall von 4,5 ms aufgezeichnet worden ist, weicht hinsichtlich des Messergebnisses deutlich von den oberen drei Messungen ab. Daher werden hier, wie bei Messung 1, die Zwischenergebnisse mit aufgezeigt.

Die Rohdaten, sowie die transformierten Daten sind in den Abbildungen (6.15) und (6.16) gezeigt, die Fitparameter finden sich in Tabelle (6.2) und der parabolische Fit wird in Abbildung (6.17) dargestellt.

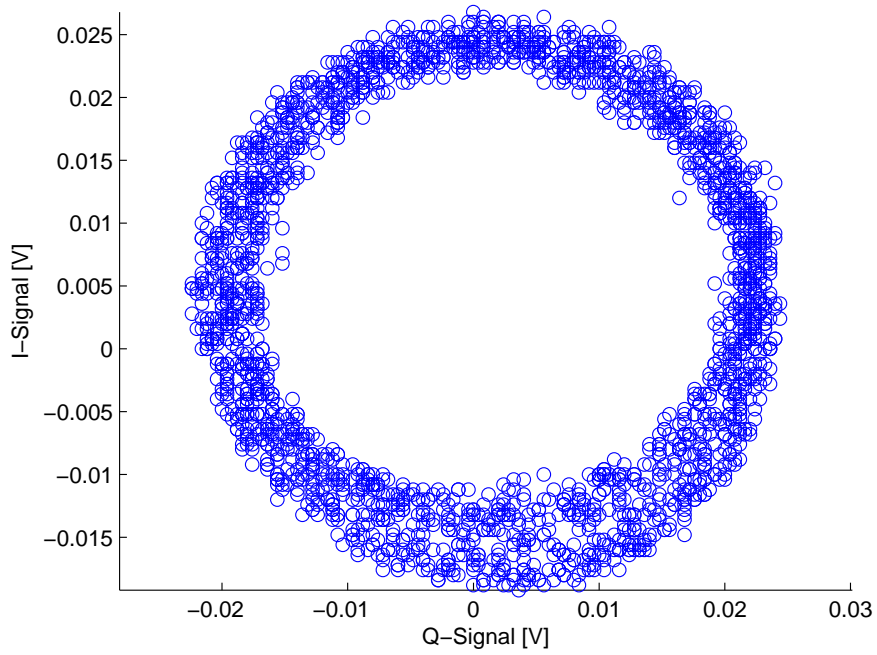


Abbildung 6.15: Rohdaten, Messung 4

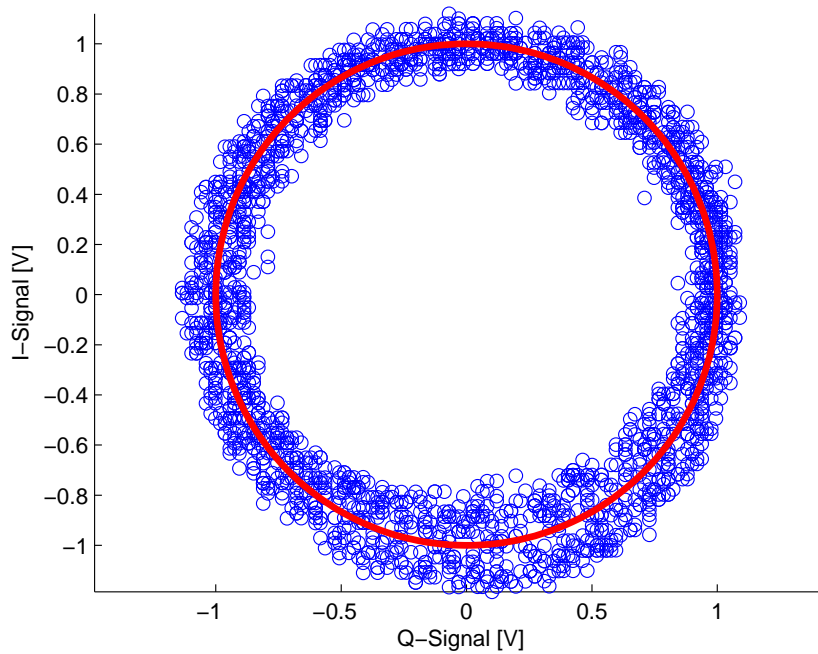


Abbildung 6.16: Transformierte Daten, Messung 4

	K_I/V	K_Q/V	x_c/V	y_c/V	β/rad
Wert	0,02103846	0,01994021	$1,465836 \cdot 10^{-3}$	$4,447290 \cdot 10^{-3}$	-0,009319684
Fehler	$5,884150 \cdot 10^{-5}$	$5,796229 \cdot 10^{-5}$	$4,821657 \cdot 10^{-5}$	$4,704157 \cdot 10^{-5}$	0,004401024

Tabelle 6.2: Fitparameter, Messung 4

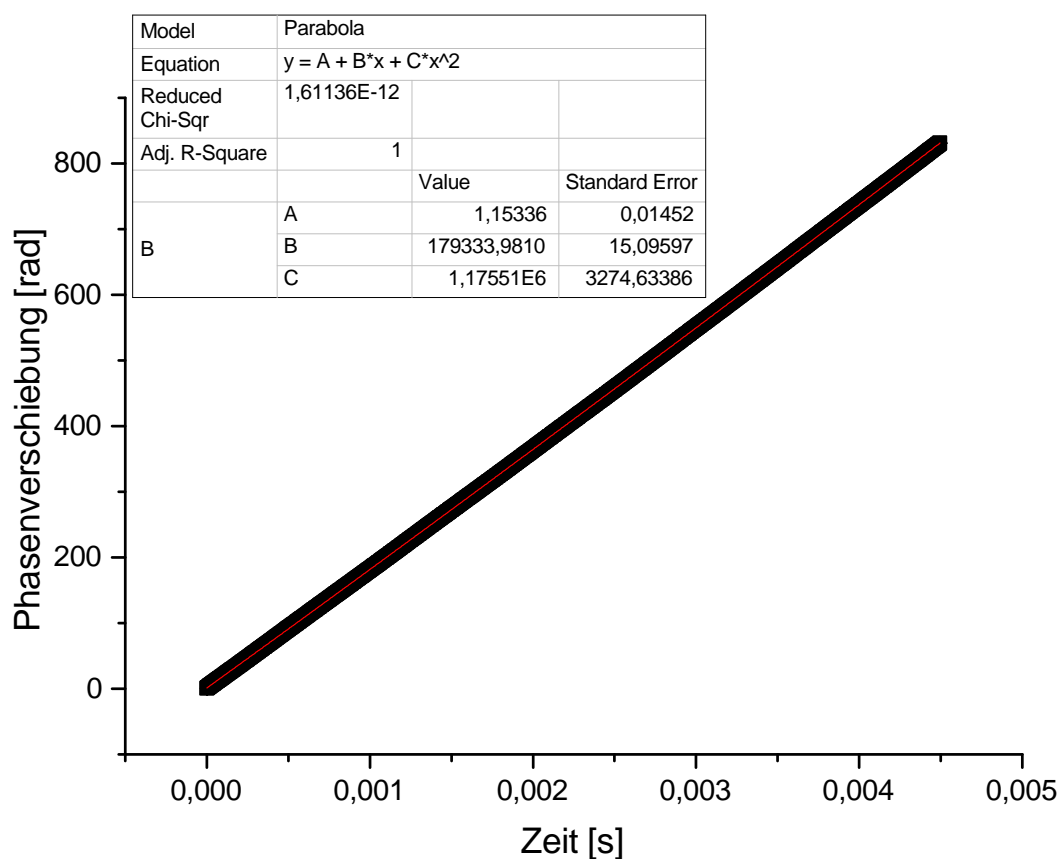


Abbildung 6.17: Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 4

Der relevante Fitparameter ist

$$C = (1,1755 \pm 0,0033) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2 .$$

Daraus folgt

$$\alpha = (2,6841 \pm 0,0003)^\circ .$$

6.4 Ergebnisse der dynamischen Keilvermessung, Messreihe 2

Bei dieser Messreihe ist das Oszilloskop mit dem Fallbeginn des Keils synchronisiert gewesen. Des Weiteren ist die Keilachsenposition berücksichtigt worden, indem der Keil um seine Mittelpunktsachse rotiert worden ist (γ -Fehler). Allerdings sind die Winkelabweichungen zum optimalen Strahleinfall (ϵ/δ -Fehler) wieder unberücksichtigt geblieben. Pro Achsenwinkel sind je drei Messungen durchgeführt worden, wodurch sich insgesamt 21 Einzelmessungen ergeben. Als Beispiel wird davon eine ausführlich gezeigt und die restlichen mit Endergebnissen in Tabellenform dargestellt. Zu beachten ist, dass eine Messung nahe am Fallbeginn, an dem die Phasenänderung noch relativ langsam verläuft, dazu tendiert, recht stark von Vibrationen beeinflusst zu werden. Daher ist der ganz flache Teil der Parabel nahe dem Scheitel (die ersten 1-2 ms) aus der Datenanpassung entfernt worden.

6.4.1 Messung 18: Synchronisiert, Messzeit 7,3 ms

Die Rohdaten des I/Q-Demodulators, die transformierten Daten und der elliptische Fit sind in den Abbildungen (6.18), (6.19) und (6.20) zusehen.

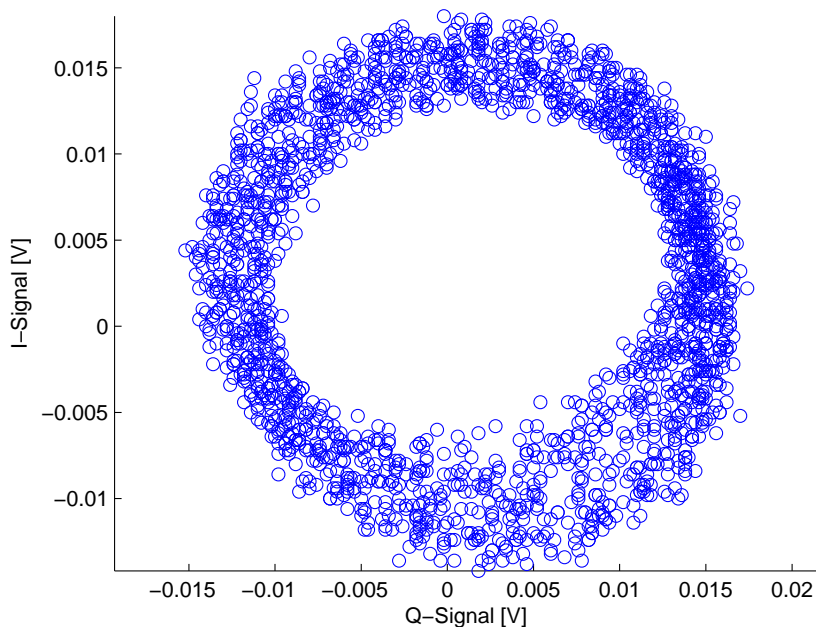


Abbildung 6.18: Rohdaten, Messung 18

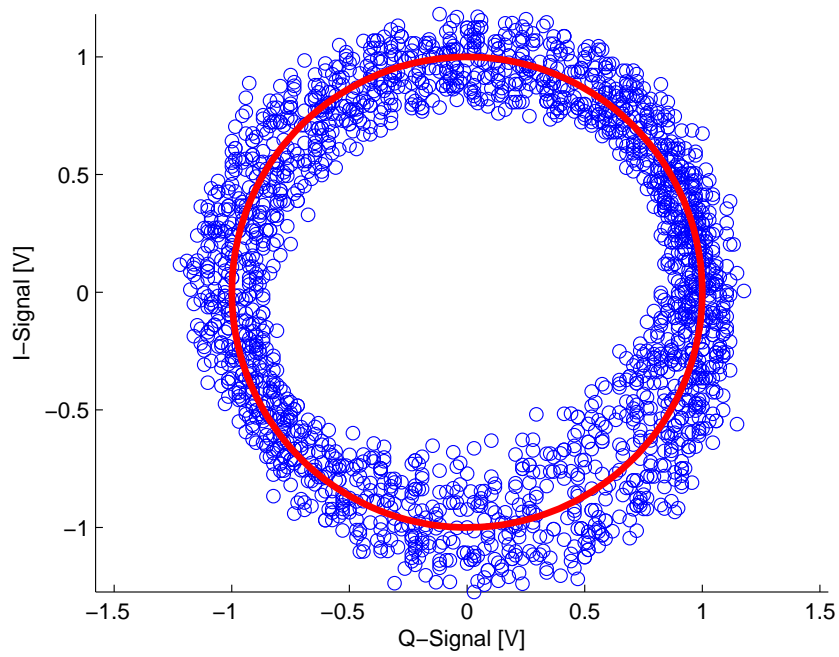


Abbildung 6.19: Transformierte Daten, Messung 18

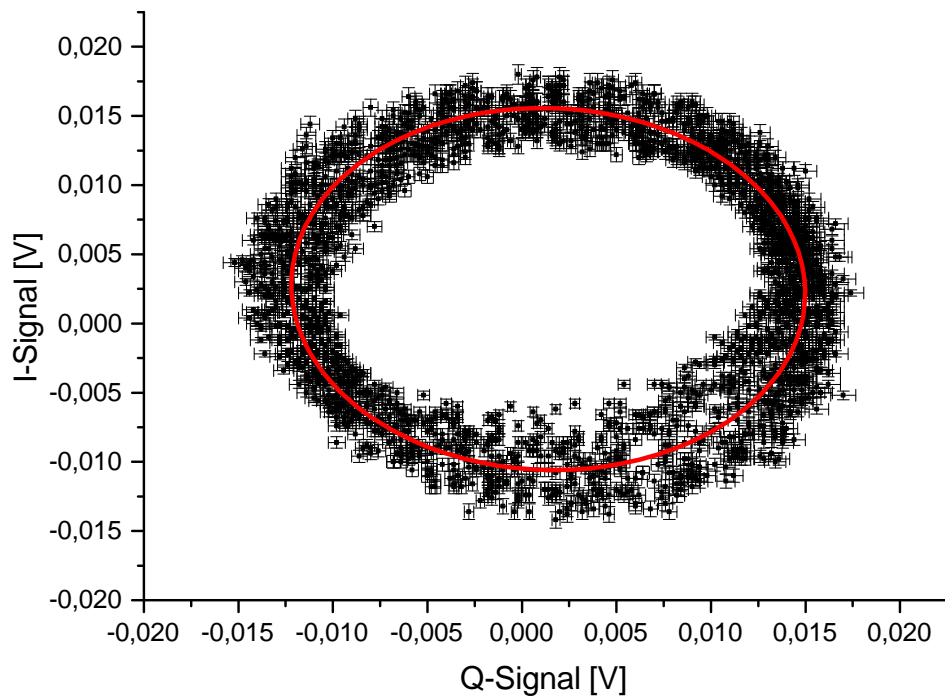


Abbildung 6.20: Elliptischer Fit der Rohdaten, Messung 18

Die ungerundeten, aus Origin gewonnen Fitparameter sind in Tabelle (6.3) dargestellt.

	K_I/V	K_Q/V	x_c/V	y_c/V	β/rad
Wert	0,01359824	0,01308885	0,001393690	0,002490731	-0,02270728
Fehler	$5,467805 \cdot 10^{-5}$	$5,854557 \cdot 10^{-5}$	$4,544161 \cdot 10^{-5}$	$4,728254 \cdot 10^{-5}$	0,006690318

Tabelle 6.3: Fitparameter, Messung 18

Das Ergebnis des parabolischen Fits ist in Abbildung (6.21):

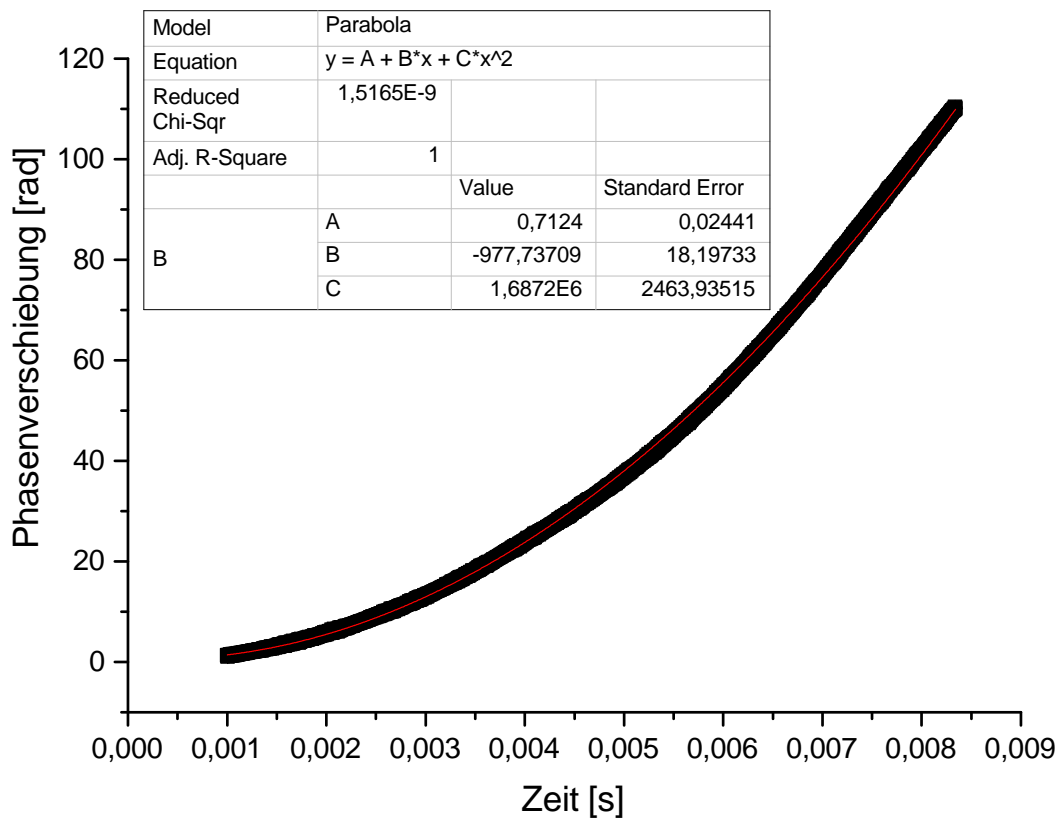


Abbildung 6.21: Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 18

Der relevante Fitparameter ist

$$C = (1,6872 \pm 0,0025) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2 .$$

Daraus folgt

$$\alpha = (3,8495 \pm 0,0004)^\circ .$$

6.4.2 Übersicht: Messungen 5 bis 25, synchronisiert

Tabelle (6.4) stellt die Ergebnisse der 21 Einzelmessungen dieser Messreihe inklusive obiger Messung 18 übersichtlich dar:

Messung	Messzeit [ms]	Achsenwinkel [°]	C $\cdot 10^6$ [rad/s ²]	ΔC $\cdot 10^6$ [rad/s ²]	α [°]	$\Delta\alpha$ [°]
5	7,0	220	1,6793	0,0030	3,8315	0,0003
6	8,0	220	1,6729	0,0018	3,8169	0,0002
7	6,0	220	1,7376	0,0050	3,9641	0,0004
8	8,0	221	1,6778	0,0038	3,8281	0,0003
9	8,0	221	1,6217	0,0049	3,7004	0,0003
10	8,0	221	1,6864	0,0027	3,8476	0,0003
11	10,0	222	1,6774	0,0015	3,8272	0,0002
12	6,2	222	1,3244	0,0027	3,0235	0,0002
13	10,0	222	1,5485	0,0020	3,5338	0,0002
14	10,0	224	1,7620	0,0028	4,0196	0,0003
15	6,6	224	1,6931	0,0037	3,8629	0,0003
16	7,4	224	1,7157	0,0025	3,9143	0,0003
17	7,7	225	1,6923	0,0019	3,8611	0,0002
18	7,3	225	1,6872	0,0025	3,8495	0,0003
19	9,0	225	1,6679	0,0014	3,8056	0,0002
20	7,0	226	1,5913	0,0030	3,6313	0,0003
21	7,9	226	1,6625	0,0020	3,7933	0,0002
22	6,4	226	1,6359	0,0025	3,7328	0,0003
23	6,8	227	1,6110	0,0030	3,6761	0,0003
24	8,2	227	1,6136	0,0023	3,6820	0,0002
25	6,7	227	1,5649	0,0026	3,5712	0,0003

Tabelle 6.4: Übersicht über die Ergebnisse der Messungen 5 bis 25

Die Messungen bei einem Achsenwinkel von 223° fehlen, da sie bei der Datenübertragung verloren gegangen sind. Sie sind nachträglich nicht wiederholt worden, da die Bedingungen der Messreihe nicht exakt reproduzierbar gewesen sind.

6.5 Ergebnisse der dynamischen Keilvermessung, Messreihe 3

Diese Messreihe hat das Ziel, die ϵ - und δ -Fehler manuell durch Kontrolle des Reflexionsstrahls an der Keiloberfläche auszugleichen und den γ -Fehler messtechnisch zu eliminieren. Es sind je 5 Messungen in 0° - und 90° -Stellung durchgeführt worden. Für die jeweilige Stellung werden die Ergebnisse gemittelt und die Mittelwerte sowohl mit dem Fitfehler, als auch mit dem statistischen Standardfehler versehen. Des Weiteren ist ein anderes Oszilloskop (GW Instek GDS-1104B) als zuvor verwendet worden, um eine längere Messzeit mit ausreichend Messpunkten aufzeichnen zu können, ohne dass der Auswertungsalgorithmus bezüglich der kontinuierlichen Phasenfortsetzung versagt. Teilweise ist bei den 90° -Messungen der ganz flache Parabelteil entfernt worden, da die Anpassungsalgorithmen bei Mitnahme des flachen Teils versagt haben. Von jeder Stellung wird eine Messung ausführlich gezeigt, die übrigen werden tabellarisch dargestellt.

6.5.1 Messung 30: Synchronisiert, 0° , Messzeit 20 ms

Abbildung (6.22) zeigt die Rohdaten dieser Messung ohne Fehler.

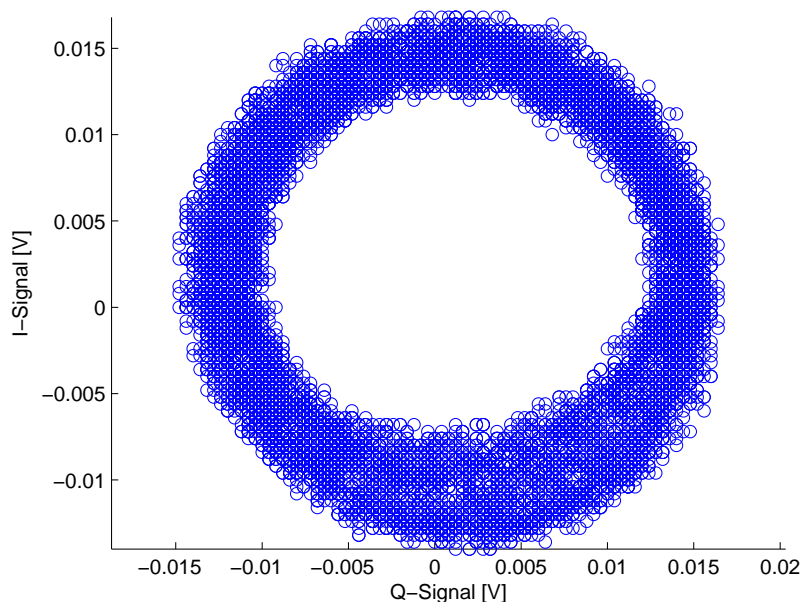


Abbildung 6.22: Rohdaten, Messung 30

Die Oszilloskopfehler sind mit den vorangegangenen Messungen identisch. Die transformierten Daten, sowie der elliptische Fit sind in den Abbildungen (6.23) beziehungsweise (6.24) zu sehen.

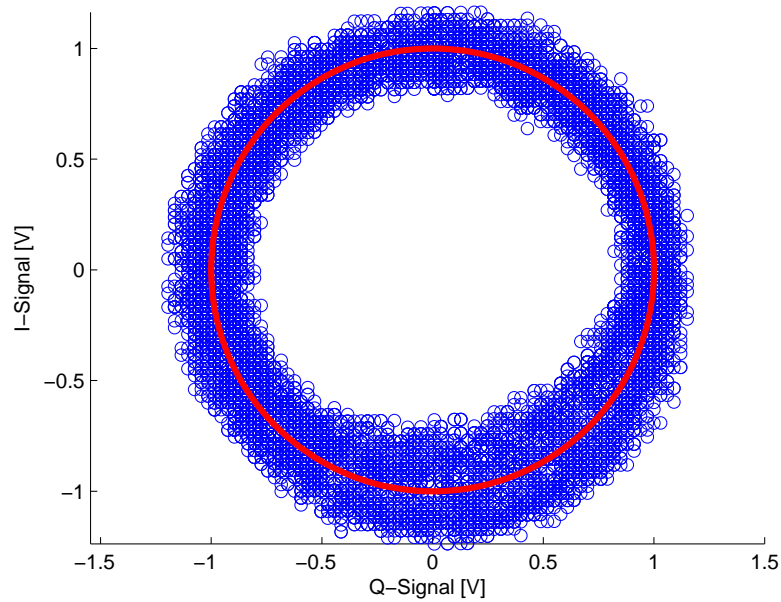


Abbildung 6.23: Transformierte Daten, Messung 30

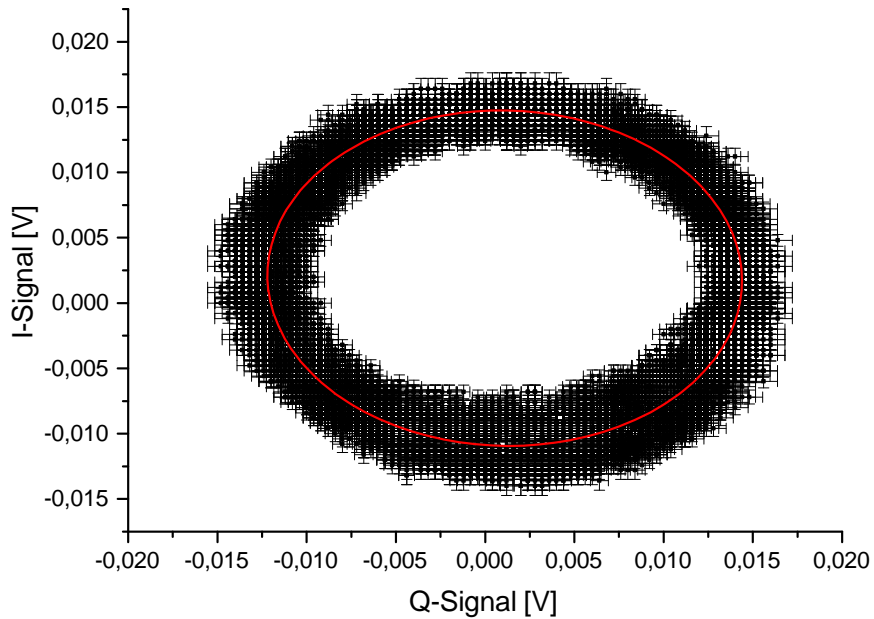


Abbildung 6.24: Elliptischer Fit der Rohdaten, Messung 30

Die daraus gewonnenen, ungerundeten Fitparameter sind in Tabelle (6.5) dargestellt.

	K_I/V	K_Q/V	x_c/V	y_c/V	β/rad
Wert	0,01330082	0,01284303	0,001097761	0,001900342	-0,01618350
Fehler	$2,212731 \cdot 10^{-5}$	$2,230048 \cdot 10^{-5}$	$1,819161 \cdot 10^{-5}$	$1,813604 \cdot 10^{-5}$	0,002690886

Tabelle 6.5: Fitparameter, Messung 30

Das Ergebnis des parabolischen Fits wird in Abbildung (6.25) gezeigt:

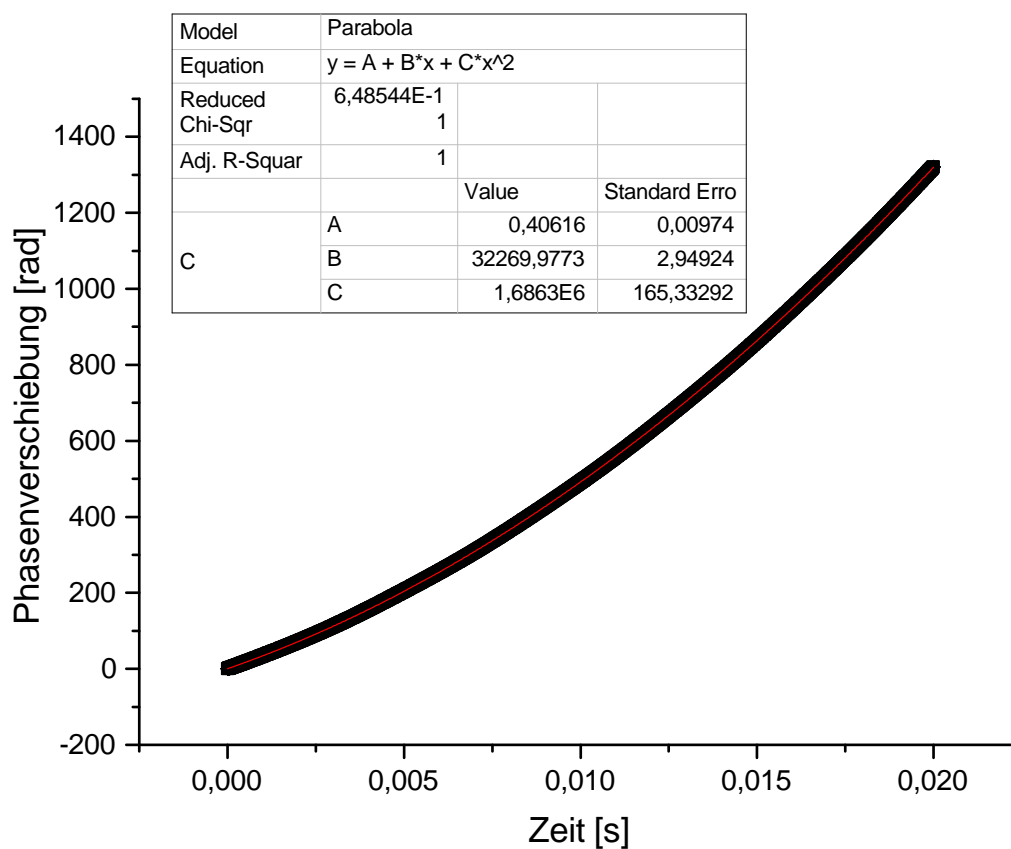


Abbildung 6.25: Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 30

Der relevante Fitparameter lautet

$$C = (1,6863 \pm 0,0002) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2 .$$

6.5.2 Messung 32: Synchronisiert, 90° , Messzeit 30 ms

Die Abbildungen (6.26) und (6.27) zeigen sowohl die Rohdaten, als auch die transformierten Daten ohne Fehler.

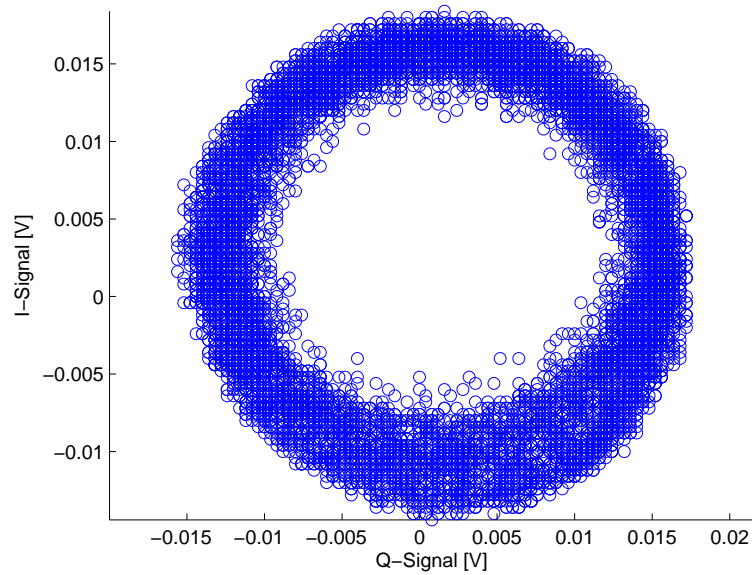


Abbildung 6.26: Rohdaten, Messung 32

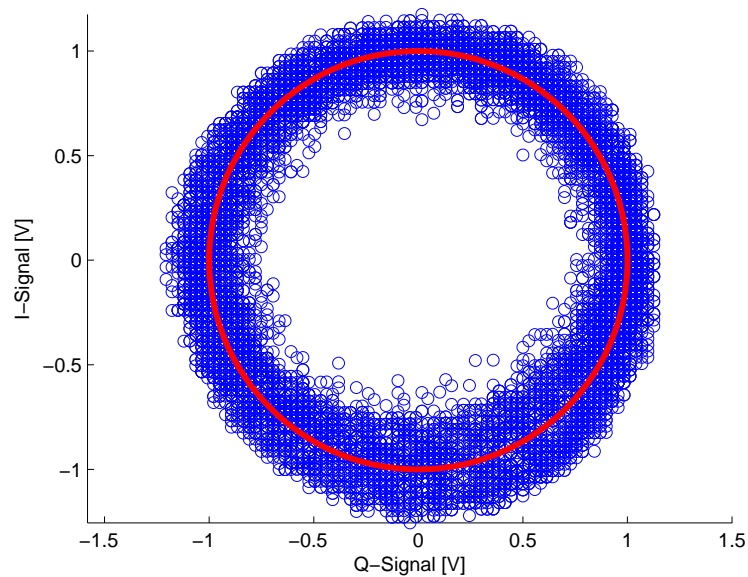


Abbildung 6.27: Transformierte Daten, Messung 32

Der elliptische Fit wird in Abbildung (6.28) gezeigt:

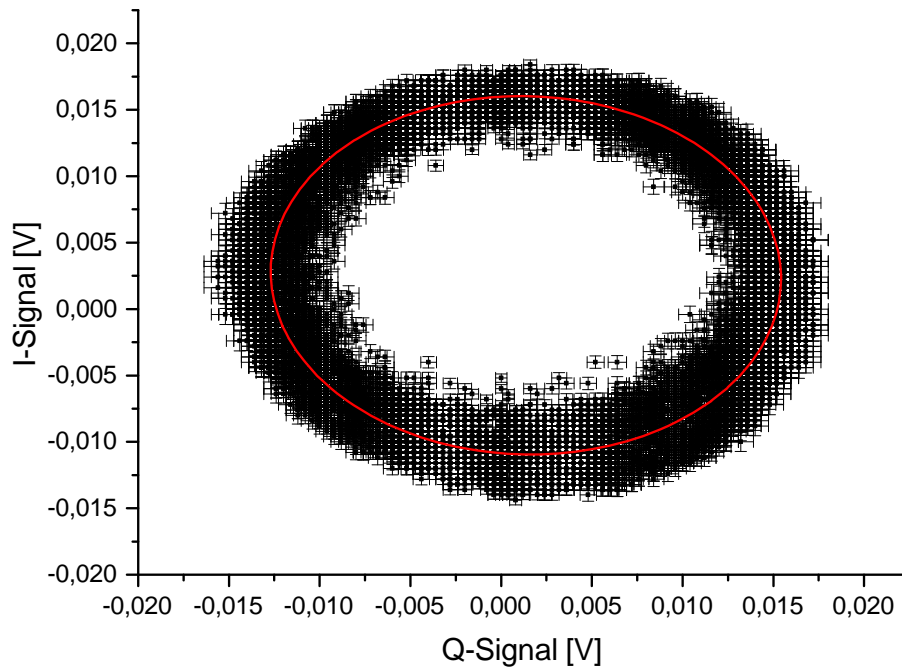


Abbildung 6.28: Elliptischer Fit der Rohdaten, Messung 32

Die daraus gewonnenen, ungerundeten Fitparameter sind in Tabelle (6.6) aufgeführt.

	K_I/V	K_Q/V	x_c/V	y_c/V	β/rad
Wert	0,01406503	0,01349397	0,001362130	0,002540178	-0,01797322
Fehler	$2,310246 \cdot 10^{-5}$	$2,298244 \cdot 10^{-5}$	$1,903631 \cdot 10^{-5}$	$1,878097 \cdot 10^{-5}$	0,0002649729

Tabelle 6.6: Fitparameter, Messung 32

Das Ergebnis des parabolischen Fits ist in Abbildung (6.29) dargestellt:

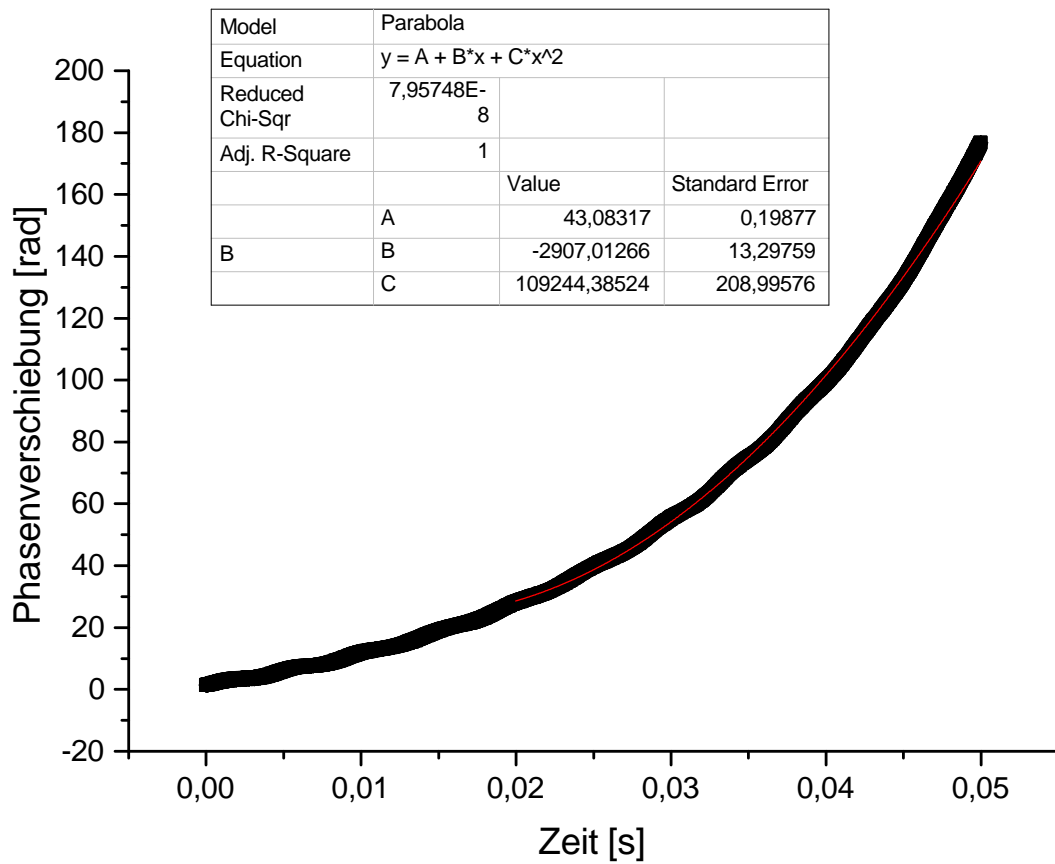


Abbildung 6.29: Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 32

Der relevante Fitparameter lautet

$$C = (0,1092 \pm 0,0003) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2 .$$

6.5.3 Übersicht: Messungen 26 bis 35, synchronisiert, 0°/90°

Tabelle (6.7) stellt die Ergebnisse der Messungen 26 bis 35 dieser Messreihe inklusive den oben gezeigten Messungen 30 und 32 übersichtlich dar:

Messung	Messzeit [ms]	Achsenwinkel [°]	C $\cdot 10^6$ [rad/s ²]	ΔC $\cdot 10^6$ [rad/s ²]
26	20	0	1,6794	0,0002
27	20	0	1,6810	0,0003
28	20	0	1,6968	0,0006
29	20	0	1,6925	0,0004
30	20	0	1,6863	0,0002
31	20	90	0,1047	0,0002
32	30	90	0,1092	0,0003
33	40	90	0,1211	0,0002
34	40	90	0,1287	0,0002
35	40	90	0,1657	0,0003

Tabelle 6.7: Übersicht über die Ergebnisse der Messungen 26 bis 35

Die Mittelwerte der jeweiligen Stellungen inklusive Fitfehler und statistischem Standardfehler sind

$$\bar{C}_{0^\circ} = (1,6872 \pm 0,0037) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2$$

und

$$\bar{C}_{90^\circ} = (0,1259 \pm 0,0111) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2 .$$

Daraus ergibt sich nach Gleichung (5.36) ein Keilwinkel α von

$$\alpha = (3,8601 \pm 0,0010)^\circ .$$

6.6 Ergebnisse der dynamischen Keilvermessung, Messreihe 4

Diese Messreihe ist analog zu Messreihe 3 durchgeführt worden. Das Ziel ist eine Bestätigung und/oder Verbesserung jener Ergebnisse gewesen. Die Verbesserung ist dadurch erreicht worden, dass die 0°- und 90°-Stellungen so gewählt worden sind, dass sie in etwa die gleiche Größe besitzen. Damit sind etwaige Datenanpassungsschwierigkeiten bei relativ kleinen Parabelöffnungen, wie sie bei der 90°-Stellung der 3. Messreihe vorgelegen haben, umgangen worden. Durch die Analogie zur Messreihe 3 wird auf eine detaillierte Darstellung einzelner Messungen verzichtet und die Ergebnisse werden lediglich in Tabelle (6.8) gezeigt.

Messung	Messzeit [ms]	Achsenwinkel [°]	C ·10 ⁶ [rad/s ²]	ΔC ·10 ⁶ [rad/s ²]
36	20	0	1,1408	0,0002
37	20	0	1,1408	0,0002
38	20	0	1,1519	0,0002
39	20	0	1,1423	0,0002
40	20	0	1,1411	0,0002
41	20	90	1,2745	0,0002
42	20	90	1,3002	0,0002
43	12	90	1,2674	0,0003
44	15	90	1,2035	0,0003
45	20	90	1,2437	0,0002

Tabelle 6.8: Übersicht über die Ergebnisse der Messungen 36 bis 45

Die Mittelwerte der jeweiligen Stellungen inklusive Fitfehler und statistischem Fehler sind

$$\bar{C}_{0^\circ} = (1,1434 \pm 0,0024) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2$$

und

$$\bar{C}_{90^\circ} = (1,2579 \pm 0,0166) \cdot 10^6 \text{ rad/s}^2 .$$

Daraus ergibt sich nach Gleichung (5.36) ein Keilwinkel α von

$$\alpha = (3,8784 \pm 0,0022)^\circ .$$

7 Diskussion und Ausblick

7.1 Vergleich und Bewertung der Messverfahren und Messergebnisse

7.1.1 Bewertung des statischen Messverfahrens

Das statische Messverfahren ist, wie schon eingangs von Kapitel 6.2 erwähnt, in Anbetracht des in Abbildung (6.9) zu sehenden Vibrationseinflusses in seiner Anfangsphase abgebrochen und nicht weiterverfolgt worden. Die Abweichung von 293 % zwischen den beiden Ergebnissen der Messung, bezogen auf den kleineren Wert der Referenzphase (φ_1 in Abbildung (5.14)) bei identischer Justage hat darauf hingedeutet, dass dieses Messverfahren, ohne abschließende Bewertung, vermutlich ungeeignet ist und ein robusteres Messverfahren entwickelt werden sollte.

Auch wenn dies nicht genau untersucht worden ist, besteht theoretisch die Möglichkeit, trotz der Vibrationsproblematik mit dem statischen Messverfahren ein brauchbares Ergebnis bezüglich des Keilwinkels hervorzubringen. Nachteilig daran ist allerdings, dass, wie auch schon bei dem bisher beschriebenen statischen Messverfahren, die Größe des Keilwinkels in Vorberechnungen und Vorüberlegungen mit einfließt. So beruht beispielsweise Gleichung (5.25) und das daraus abgeleitete Scaninkrement auf der Kenntnis der Größe des Keilwinkels. Diese Vorgehensweise ist als unzureichend eingestuft worden.

7.1.2 Bewertung des dynamischen Messverfahrens

Messreihe 1 ist ein erster Versuch gewesen, das dynamische Messverfahren in Form eines Fallexperiments anzuwenden. Dabei ist der freie Fall annähernd dadurch erreicht worden, dass der Glaskeil mit seiner Fassung, die auf einem optischen Pfosten montiert gewesen ist, in den optischen Pfostenhalter durch manuelles Öffnen der Stellschraube fallen gelassen worden ist. Daher existiert auch kein Triggersignal, sodass die Messung mit einer unbekanntem Verzögerung einsetzt. Dieses etwas unsystematische Vorgehen hat entscheidende Hinweise geliefert, dass das Fallexperiment grundlegend zu guten Messergebnissen führen kann, aber in der Ausführung noch unzureichend gewesen ist. Das lässt sich daran festmachen, dass die Messungen 1 – 3 eine maximale Abweichung von lediglich 1,7 % vom Erwartungswert des Keilwinkels aufweisen, wohingegen bei Messung 4 die Abweichung bei circa 32 % liegt. Dies hat auf zu diesem Zeitpunkt noch unberücksichtigte Freiheitsgrade

hingedeutet. Die Messwerte mit den genannten geringen Abweichungen vom Erwartungswert sind daher eher als zufällig, anstatt als zielgerichtet zu bewerten.

Bei Messreihe 2 ist versucht worden, den Einfluss von verschiedenen Rotationszuständen (γ -Fehler) zu untersuchen. Das Ziel ist es gewesen, den optimalen Rotationszustand ausfindig zu machen, da das Einbringen des Keils in die Fassung nicht derart präzise gemacht werden kann, dass die Markierungen der Fassung verwendet werden können. Besonders auffällig sind die bei identischem Achsenwinkel, bezogen auf den mittleren Wert, von einander um bis zu 14 % abweichenden Ergebnisse der in Tabelle (6.4) gezeigten Messungen. Dies hat auf weitere, nicht einkalkulierte Freiheitsgrade hingedeutet. Das bedeutet, dass die Messergebnisse aus Messreihe 2 teils brauchbar gewesen sind, aber vielmehr als Ausgangsposition zu weiteren theoretischen Überlegungen und damit zu präziseren Messungen gedient haben.

Messreihe 3 sollte auf dem Korrekturschema nach Abbildung (5.19) beruhen. Allerdings sind, wegen des immensen Messaufwands bei Anwendung des Korrekturschemas, nur die γ -Fehler korrigiert und die ϵ -Fehler manuell per Augenmaß ausgeglichen worden. Nachteilig an dieser Messreihe ist gewesen, dass die Rotationszustände so gewählt gewesen sind, dass sich die Parabelöffnungen um eine Größenordnung unterscheiden. Im Laufe der Messreihen ist ersichtlich geworden, dass große Phasenverschiebungen zu sehr guten Datenanpassungen führen, wohingegen kleine Phasenverschiebungen, das bedeutet sehr flache Parabeln, teilweise unpräzise angepasst werden. Besonders flache Passagen nahe dem Scheitel sind daher mit Hinblick auf eine bessere Datenanpassung aus manchen Messungen entfernt worden (siehe Messung 31 und 32 in Tabelle (6.7)). Auch wenn das Ergebnis des Winkels des Glaskeils dieser Messreihe nicht innerhalb der Fehler mit dem Erwartungswert übereinstimmt, ist gezeigt worden, dass die messtechnische Korrektur der γ -Fehler, mit manueller Korrektur der ϵ -Fehler, derart präzise ist, dass eine Abweichung von nur 0,51 % vom Erwartungswert vorliegt. Dieses Ergebnis zeigt daher auf, dass die interferometrische Messung im Hinblick auf eine präzise Messung der Elektronendichte an einem Plasma sehr vielversprechend ist.

Das Ziel von Messreihe 4 ist es gewesen, ein Endergebnis des Keilwinkels hervorzubringen, das innerhalb der Fehlergrenzen des Erwartungswerts liegt. Dies ist zum einen durch eine noch höhere Präzision bei der manuellen ϵ -Fehlerkorrektur (längerer Reflexionsweg und somit bessere Sichtbarkeit des ϵ -Fehlers) und zum anderen durch γ -Korrekturmessungen, die näherungsweise dieselbe Größenordnung besitzen, versucht worden zu verwirklichen. Dieses Ziel ist mit einer Abweichung von nur 0,13 % vom Erwartungswert und einer Über-

einstimmung innerhalb der Fehlergrenzen erreicht worden. Einziger Nachteil dieser Messreihe ist, dass bei zwei Messungen Daten aus dem flachen Teil der Parabel entfernt worden sind (Messung 43 und 44 in Tabelle (6.8)), weil diese dennoch zu nah am Scheitel gemessen worden sind. Dies ist darin begründet, dass es trotz Synchronisation durch die elektromagnetische Aufhängung, bedingt durch eine fehlende Vorrichtung, die die Aufhängeposition reproduzierbar macht, zu kleinen Schwankungen des Triggerzeitpunkts kommen kann.

7.1.3 Abschätzung der Auflösung des Interferometers bei Messung an einem Plasma

Festzuhalten ist, dass der Keilwinkel in Messreihe 3 mit einem relativen Fehler von 0,03 % und in Messreihe 4 mit einem relativen Fehler von 0,06 % bestimmt worden ist. Es stellt sich die Frage, ob sich dieses Ergebnis auf die zu erwartende Genauigkeit des Interferometers hinsichtlich einer Messung an einem Plasma übertragen lässt. Da der Keilwinkel aus einem Fitparameter und nicht aus der direkt gemessenen Größe ermittelt worden ist, haben der absolute und auch der relative Fehler des Keilwinkels wenig bis keine quantitative Aussagekraft, wie präzise das Interferometer die Elektronendichte an einem Plasma messen kann.

Logischer ist es, die absoluten Fehler der direkt gemessenen Größe, also der Phasenverschiebung, zu betrachten, die sich aus den Oszilloskopfehlern und aus den Fitfehlern der elliptischen Datenanpassung ergeben. Die absoluten Fehler der Phasenverschiebung liegen sowohl bei Messungen mit hoher, als auch bei Messungen mit niedriger Maximalphasenverschiebung unterhalb einer oberen Schranke von $\sigma_{\Delta\varphi} \approx 0,08 \text{ rad}$ ($4,6^\circ$). Dies entspricht, unter den Rahmenbedingungen des neuen Aufbaus des Theta-Pinchs, einer unteren Schranke für die minimal auflösbare Elektronendichte von $n_{e,min} \approx 1,5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$. Die Ausnahme bilden Messungen, bei denen die Justage während des Falls teilweise verloren gegangen ist, sodass dort die Fehler des elliptischen Fits die Fehler der Phasenverschiebung außergewöhnlich vergrößert haben.

Als Beispiel dient Messung 35, deren transformiertes Q-Signal und die Rohdaten in den Abbildungen (7.1) und (7.2) gezeigt werden.

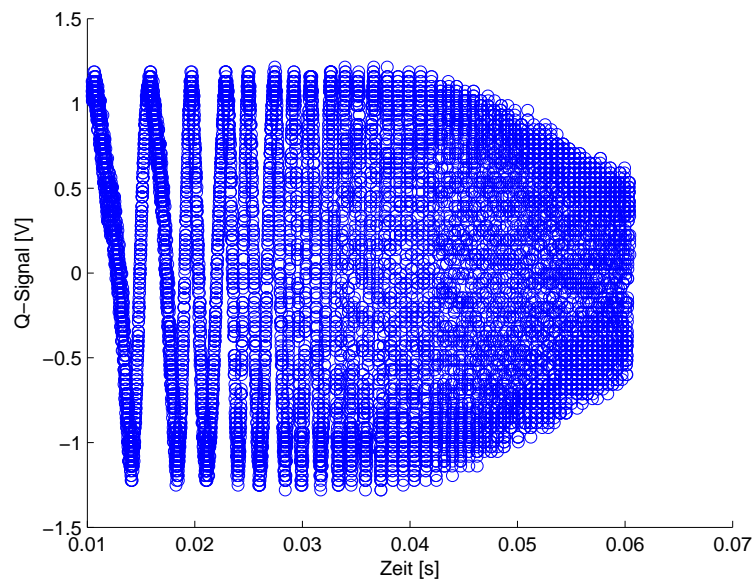


Abbildung 7.1: Transformiertes Q-Signal, Messung 35

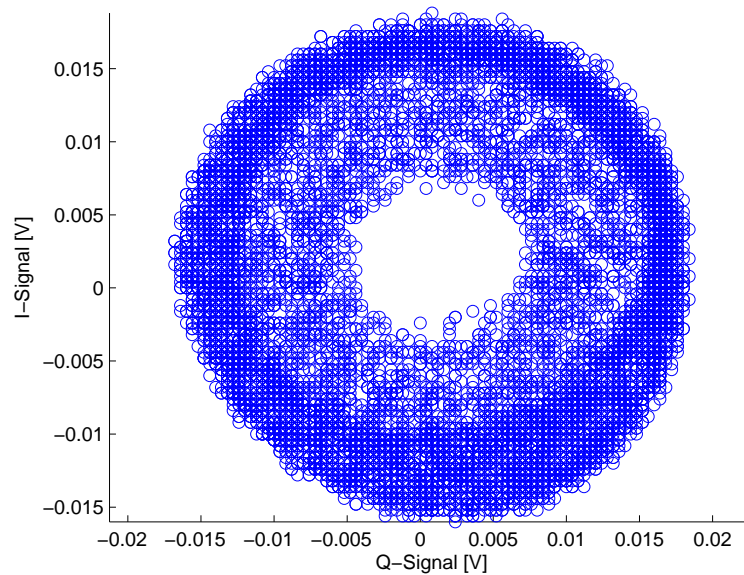


Abbildung 7.2: Rohdaten, Messung 35

Zu sehen ist, dass es durch partiellen Justageverlust während des Falls zu einer Absenkung der Amplitude des Q-Signals kommt (I-Signal analog). Diese Absenkung wirkt wie eine Vergrößerung des Rauschens, sodass der elliptische Fit größere Fehler aufweist.

Um mit dem beschriebenen Interferometer einen möglichst großen Dichtebereich, vor allem hin zu kleinen Dichten unterhalb der oben genannten Auflösungsgrenze, abzudecken, ist es vorrangig, die Phasenfehler zu verringern. Zum einen kann dazu ein Oszilloskop mit besserer Spannungsauflösung beitragen. Bei Verwendung eines 12-Bit Oszilloskops mit einem Messfehler von 1 % ist überschlagen worden, dass der Maximalphasenfehler um circa 75 % verringert werden könnte. Zum anderen sollte versucht werden, das Rauschen in den Messungen zu reduzieren. Die oben beschriebene Amplitudenabsenkung durch Justageverlust sollte bei der Messung am Plasma nicht auftreten, sodass ausschließlich das Rauschen der elektronischen Bauteile beachtet werden muss. Vermutlich wird dieses Rauschen im vorliegenden Fall im Verstärker des Photodetektors erzeugt, der provisorisch und nicht optimal auf das Interferometer abgestimmt gewesen ist. Für zukünftige Messungen sollte die Verstärkungsqualität durch einen Transimpedanzverstärker verbessert werden. Des Weiteren wäre es denkbar, dass es im I/Q-Demodulator zu Signalinterferenzen durch Signalreflexion an den Tiefpassfiltern kommt. Eine dafür geeignete Lösung wäre die Ersetzung der Tiefpassfilter durch Diplexer.

Ein erstrebenswerter Zielwert des Phasenfehlers wäre $0,1^\circ$, sodass mit ausreichend hohem Signal-to-Noise der relative Fehler der Elektronendichte in einem großen Bereich niedrig gehalten werden kann. Hinsichtlich der Elektronendichte würde einem Fehler der Phasenverschiebung von $0,1^\circ$ eine Auflösungsgrenze von $n_{e,min,neu} \approx 3,3 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$ entsprechen.

7.2 Probleme bei der Datenanpassung bei flachen Parabeln nahe dem Parabelscheitel

Die schon häufig angesprochene Datenselektion bei flachen Parabelausschnitten nahe dem Scheitel soll nun im Vergleich mit steileren Parabelpassagen detaillierter betrachtet werden. Exemplarisch sind in Abbildung (7.3) für Messung 32 Fitfunktionen bei verschiedenen selektierten Daten abgebildet. Die grüne Fitfunktion nutzt alle gegebenen Daten von 0-50 ms, die magentafarbene Fitfunktion nutzt die Daten ab 10 ms, die gelbe Fitfunktion die Daten ab 20 ms und die rote Fitfunktion die Daten ab 30 ms. Allen Fitfunktionen gemeinsam ist ein ODR-Algorithmus ohne Fehlergewichtung.

Zu erkennen ist, dass die verschiedenen Fitfunktionen schon rein optisch einerseits teils stark von den Messdaten abweichen und andererseits auch untereinander hohe Abweichungen zeigen. Bezogen auf die kleinste der gezeigten Parabelöffnungen liegen der Minimal- und Maximalwert um circa 171 % auseinander. Dies ist zunächst nicht trivial erklärbar. Möglicherweise spielt dabei die elektromagnetische Aufhängung eine Rolle. Es ist denkbar, dass kurz nach Fallbeginn immer noch eine anziehende Kraft existiert, die wie eine

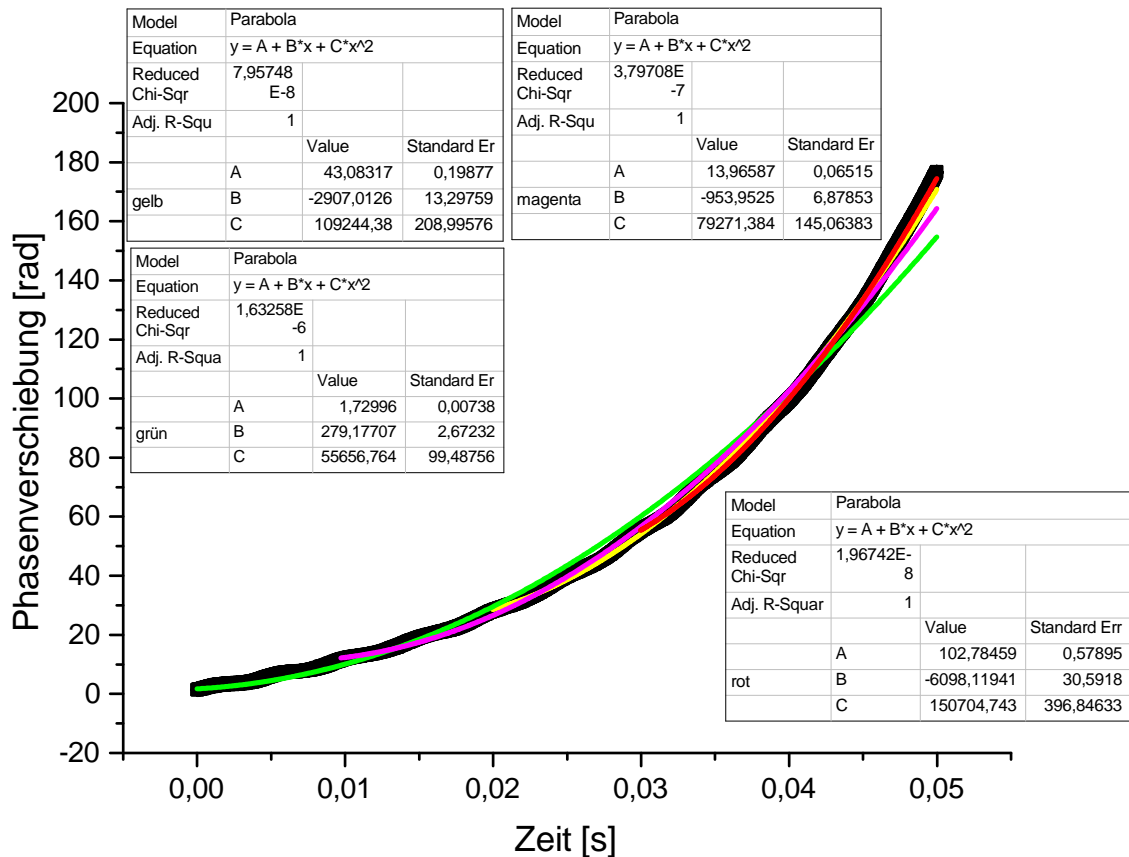


Abbildung 7.3: Verschiedene Fitfunktionen auf der Basis verschieden selektierter Daten, Messung 32

Reibungskraft auf den Keil antiparallel zur Fallrichtung wirkt. Daher ist wahrscheinlich der Anfangsabschnitt nahe dem Scheitel zusätzlich zum Vibrationseinfluss verfälscht. Der logische Schluss aus dieser Argumentation ist, die Daten in der Nähe des Fallbeginns zu verwerfen. Allerdings ist nicht klar, ab welchem Zeitpunkt die Datenanpassung erfolgen soll. Neben den für die gezeigten Fitfunktionen verwendeten Startzeitpunkten wären auch beliebige andere möglich gewesen. Daher ist entschieden worden, die Daten in Hinblick auf folgende Kriterien zu selektieren:

- Menge der verwendeten Daten
- χ^2 und R -Wert
- Fehlergröße der Parabelparameter
- näherungsweise Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert (Größenordnung)
- Erscheinungsbild der Messdaten (Knicke)

Dagegen zeigen sehr steile Ausschnitte der Parabel, die dazu noch eine vergleichsweise hohe Maximalphasenverschiebung aufweisen, keine derartigen Probleme bei der Datenanpassung. Abbildung (7.4) zeigt einen solchen Fall:

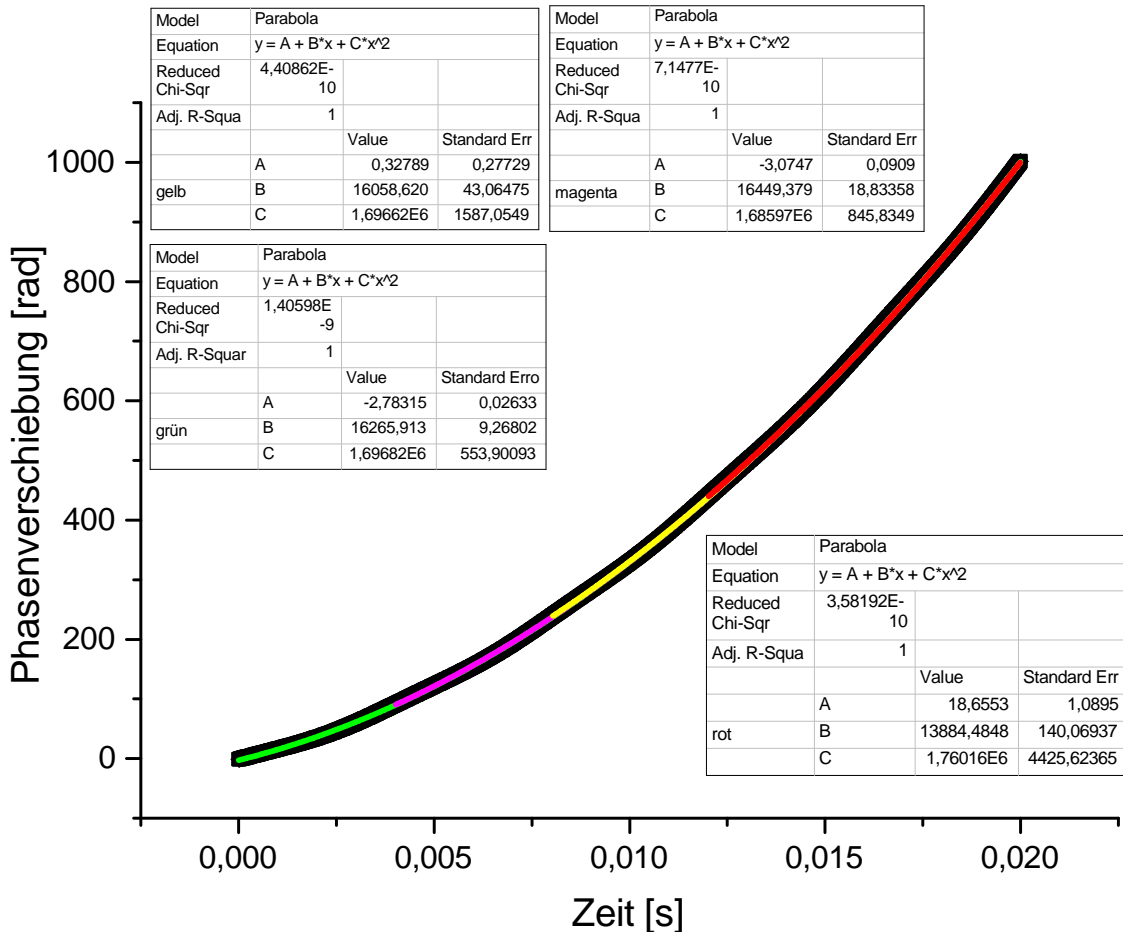


Abbildung 7.4: Verschiedene Fitfunktionen auf der Basis verschieden selektierter Daten, Messung 28

Um einen möglichst guten Vergleich zu Abbildung (7.3) zu haben, sind die Startzeitpunkte auch in Fünftelschritten gewählt worden. Die grüne Fitfunktion nutzt von 0-20 ms wieder alle gegebenen Daten aus, die magentafarbene Fitfunktion nutzt die Daten von 4-20 ms, die gelbe Fitfunktion die Daten von 8-20 ms und die rote Fitfunktion die Daten von 12-20 ms. Schon rein optisch ist ein deutlicher Unterschied zu Abbildung (7.3) erkennbar. Die Fitfunktionen sind nahezu deckungsgleich und weisen nur eine Abweichung zwischen Minimal- und Maximalwert der Parabelöffnung von 4,4 % bezogen auf den Minimalwert auf. Hier ist die Datenauswahl sehr einfach, da es am naheliegendsten ist, die Fitfunktion zu verwenden, die auf der größten Anzahl an Daten basiert und darüber hinaus noch den kleinsten Fehler aufweist.

7.3 Vorschläge zur Anpassung des Interferometers an den Theta-Pinch

7.3.1 Grundlegende Strahlführung

Auch wenn bis zu diesem Zeitpunkt noch keine konkreten Pläne zur Anbringung des Interferometers an den Theta-Pinch gemacht worden sind, lassen sich schon grundlegende Überlegungen beispielsweise hinsichtlich der Strahlführung durchführen.

Einer der Strahlarme muss durch das Plasma und der andere um das Plasma herumgeführt werden muss. Dabei ist sowohl eine horizontale, als auch eine vertikale Ausrichtung des Interferometers denkbar. Da bei der vertikalen Ausrichtung der Laserstrahl im Bereich unter der Spule verlaufen muss, wo sich viele weitere Bauteile und elektrische Geräte befinden, die in den Strahlengang gelangen könnten, ist eine horizontale Strahlführung höchstwahrscheinlich die sinnvollste Lösung. Dabei könnten entsprechend große optische Montageplatten horizontal links und rechts der Spulenchse auf einem Gerüstsystem angebracht werden, auf denen die optischen Komponenten montiert werden würden.

Des Weiteren stellt sich die Frage, ob ein asymmetrischer Interferometeraufbau, bei dem der Spiegel S_2 in Abbildung (4.2) mit dem oberen rechten Strahlteiler T vertauscht wird, den wahrscheinlich begrenzten Arbeitsbereich besser ausnutzen könnte. Diese Frage lässt sich allerdings erst in der finalen Ausarbeitung einer solchen Konstruktion beantworten. Dabei muss beachtet werden, dass bei einem asymmetrischen Aufbau des Interferometers die ungefähre Kohärenzlänge von 20-30 cm des Helium/Neon-Lasers einkalkuliert wird. Würde die asymmetrische geometrische Weglänge die Kohärenzlänge überschreiten, wäre die Interferenz nicht herstellbar.

Die Einbringung beziehungsweise Herausführung des Laserstrahls durch das Vakuumsystem des Experiments kann wahrscheinlich problemlos mit in geeigneten Flanschen integrierten, antireflexbeschichteten, vakuumtauglichen Fenstern geschehen.

7.3.2 Vibrationskompensation

Da der Laserstrahl durch das Experiment hindurch justiert werden muss und optische Komponenten am Experiment angebracht werden müssen, ist es wahrscheinlich, dass die Messergebnisse durch Vibrationen beeinflusst werden. Durch die hohen Ströme von mehreren 10 kA im Experiment kommt es zu einem Verzug der verschraubten Komponenten, vor allem der Spule, sodass sich Vibrationen auf das optische System übertragen könnten. Da die Vibrationsfrequenz mit hoher Wahrscheinlichkeit mit der Experimentfrequenz vergleichbar ist, ist sie während des Messvorgangs grundsätzlich nicht vernachlässigbar.

Außerdem sind weitere vibrierende Komponenten, wie Pumpsysteme, am Experiment angebracht, die einen potentiellen Vibrationseinfluss auf die Messung ausüben könnten. Diese Problematik eröffnet zwei mögliche Szenarien:

1. Die Vibrationsphasenverschiebung ist gegenüber der Größe der Phasenverschiebung, die von der Elektronendichte hervorgerufen wird, zu allen Zeiten oder zumindest im Bereich der maximalen Elektronendichte, was als ausreichend befunden werden könnte, vernachlässigbar.
2. Die Vibrationsphase ist auf Grund ihrer Größe gegenüber der Phasenverschiebung der Elektronendichte nicht vernachlässigbar und/oder eine mögliche partielle Vernachlässigung wird als nicht ausreichend befunden.

Im ersten Fall müssen keine weiteren Maßnahmen getroffen werden. Im zweiten, viel wahrscheinlicheren Fall müssen Maßnahmen zur Vibrationskompensation ergriffen werden. Dafür kommen grundsätzlich zwei Methoden in Frage:

1. eine mechanische Kompensation
2. eine optische Kompensation

Beide Methoden sind voraussichtlich kostenintensiv, sodass diejenige ausgewählt werden sollte, die auf Grund ihrer Eigenschaften die Vielversprechendere ist. Die mechanische Kompensation ist sehr aufwendig, da ein eigenes Gerüstsystem um das eigentliche Experiment herum konstruiert werden müsste, das mechanisch derartig vom Experiment getrennt ist, dass sich keine Vibrationen übertragen können. Dieses Vorgehen hat den weiteren Nachteil, dass es potentiell nicht mehr flexibel auf einen sich im Laufe der Zeit verändernden Experimentaufbau angepasst werden kann. Ungewiss ist, ob eine ausreichende mechanische Trennung überhaupt hergestellt werden kann.

Daher ist die optische Kompensation wahrscheinlich die bessere Lösung. Dabei wird ein zweiter Laser verwendet, um die Vibrationen, wie in Kapitel 5.3.2 beschrieben, zu eliminieren. Die Vorteile sind die Möglichkeit einer flexiblen Montage und vor allem die physikalisch vollständige Eliminierung von Vibrationen. Da am Interferometer zwei Ausgänge zur Verfügung stehen, können durch Filter die entsprechenden Wellenlängen selektiert und je eine Wellenlänge an je einem Ausgang gemessen werden.

7.4 Erweiterungen des Interferometers

Als sinnvolle Erweiterungen des gezeigten Interferometers sind Komponenten anzusehen, mit denen simultan zur Elektronendichte das Magnetfeld gemessen werden kann. Ein solcher Aufbau ist schematisch in Abbildung (7.5) zu sehen:

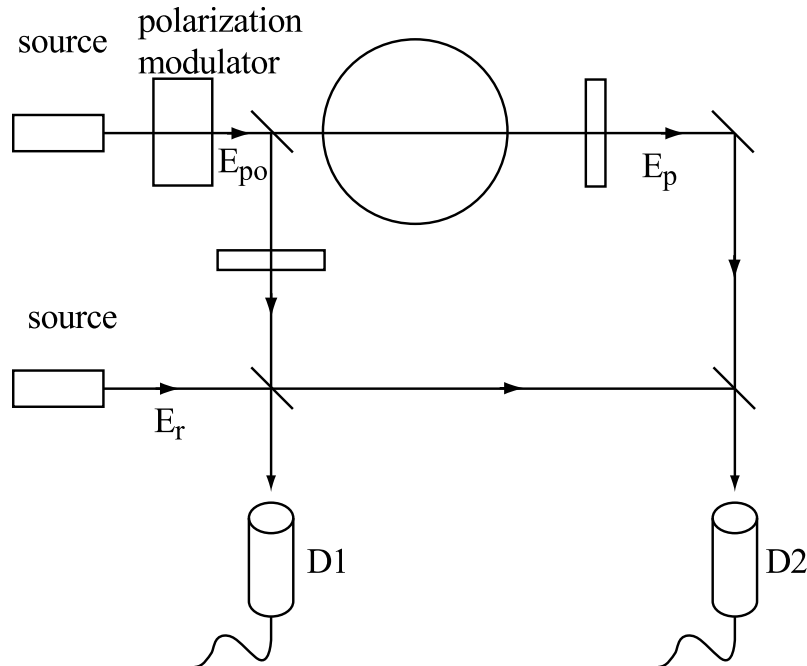


Abbildung 7.5: Schematischer Aufbau einer Kombination aus Interferometer und Polarisimeter [Ser99, S. R95]

Diese Erweiterungen sind Vorrichtungen, mit denen die Polarisationsrichtung des Laserstrahls analysiert und damit der Faraday-Effekt gemessen werden kann. Auch wenn der Aufbau in Abbildung (7.5) abweichend von dem in Abbildung (5.1) ist, ist das Funktionsprinzip vergleichbar. Ähnlich der Frequenzverschiebung, die mit dem akusto-optischen Modulator hervorgerufen wird, wird die Polarisation moduliert und ein Referenzsignal mit einem vom Plasma veränderten Signal verglichen.

Unter der Annahme einer homogenen Elektronendichte \bar{n}_e entlang des Laserstrahls folgt für die integrierte Flussdichte B_{\parallel} nach Gleichung (3.90)

$$\int B_{\parallel} dl \approx \frac{2\theta c m_e n_c}{\bar{n}_e e}, \quad (7.1)$$

wobei θ der gemessene Rotationswinkel der Polarisationsrichtung ist.

Für eine Messung ohne Plasma müsste zur Magnetfeldvermessung die Möglichkeit überprüft werden, den Rotationswinkel in eine messbare Größenordnung zu verschieben, indem der Laserstrahl durch ein entsprechendes Medium propagieren muss. Denkbar wäre ein homogener Zylinder mit bekannter Länge aus einem Material mit einem von eins verschiedenen Brechungsindex, wie zum Beispiel Glas oder Wasser.

Da es in der Regel für plasmaphysikalische Experimente von großer Bedeutung ist, neben der Elektronendichte und dem Magnetfeld auch die Elektronentemperatur zu kennen, sollte in Betracht gezogen werden, diesen dritten Parameter simultan zu den anderen beiden interferometrisch zu messen. Wie in [MDB⁺07] beschrieben, existiert ein Temperatureinfluss auf die interferometrische Messung und es sollte überprüft werden, ob dieser Einfluss durch eine geeignete Adaption an das Theta-Pinch-Experiment messtechnisch genutzt werden kann. Zunächst sind die Aussichten, ohne weitere detaillierte Analyse, als schlecht einzustufen, weil dieser Effekt, bei den gegebenen Elektronentemperaturen um 5 eV, eine nur sehr geringe Korrektur der Elektronendichte von $1,5 \cdot 10^{-3} \%$ ausmacht. Dennoch bleibt eine endgültige Einschätzung dieses Effekts abzuwarten.

Weiterhin wäre zu untersuchen, ob und in welcher Form eine ortsauflösende Messung der Elektronendichte durchgeführt werden kann. Für eine Ortsauflösung in einer bestimmten Richtung müssen ausreichend viele Messungen in der dazu senkrechten Richtung gemacht werden, um mit der Annahme von gegebenen Symmetrien durch die sogenannte *Abel-Inversion* eine Ortsauflösung zurückrechnen zu können. Ohne detaillierte Prüfung scheint auf Grund des zylindrischen Aufbaus des Theta-Pinchs eine Ortsauflösung in radialer Richtung für leicht realisierbar. Die axiale Auflösung scheint dagegen zunächst deutlich schwieriger, wenn nicht unmöglich zu sein, da durch die Spule und deren Halterung wenig Raum für eine Einbringung und Hinausführung des Laserstrahls vorhanden ist, ohne dabei auf Hindernisse zu treffen.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Verschiebung der Elektronen gegenüber den Ionen im Plasma durch ein externes elektrisches Feld [Str11, S. 11]	2
2.2	Debye-Abschirmung [Str11, S. 8]	5
3.1	Momentaufnahme einer skalaren Kugelwelle (links) und einer ebenen Welle mit Ausbreitungsrichtung (rechts) [Mes08, S. 45]	9
3.2	Gauss-Strahl inklusive Intensitätsverteilung [PPBS02, S. 657]	12
3.3	Linear polarisierte elektromagnetische Welle [LM11, S. 55]	13
3.4	Links-zirkular polarisierte elektromagnetische Welle [Dem06, S. 194]	14
3.5	Projektion einer elliptisch polarisierten elektromagnetischen Welle [Nol11, S. 268]	15
3.6	Streuprozesse im Medium [Hec02, S. 91]	16
3.7	Bildung der transmittierten Welle aus Primär- und Sekundärwelle [Dem06, S. 220]	17
3.8	Veranschaulichung des Faraday-Effekts [Hec02, S. 368]	28
4.1	Schema des Michelson-Interferometers [Dem06, S. 305]	33
4.2	Schema des Mach-Zehnder-Interferometers [HM05, S. 42]	34
5.1	Übersicht über das verwendete Interferometer inklusive elektrotechnischer Komponenten	36
5.2	Termschema des Helium/Neon-Lasers [EE10, S. 70]	37
5.3	Aufbau eines Helium/Neon-Lasers [EE10, S. 73]	38
5.4	Schema eines akusto-optischen Modulators [Liu05, S. 390]	39
5.5	Bragg-Beugung in einem akusto-optischen Modulator [PPBS02, S. 794] . .	40
5.6	Potentialgradient und Photoanregung am p-n-Übergang [Liu05, S. 968] . .	41
5.7	Verschiedene Betriebsmöglichkeiten von Photodioden [Liu05, S. 970]	42
5.8	Parameter des Photodetektors [Tho15, S. 13]	43
5.9	Schaltbild des Photodetektors [Tho15, S. 10]	44
5.10	Schaltskizze eines I/Q-Demodulators	45
5.11	Darstellung der Phaseneindeutigkeit	48
5.12	Verfälschte Phasen durch Intensitätsverlust	49
5.13	Möglicher Aufbau eines heterodynen Interferometers	50
5.14	Geometrische Grundlage des Testverfahrens	54

5.15	Geometrische Überlegung zur Keilausrichtung	55
5.16	Schematische Darstellung der elektromagnetischen Aufhängung	57
5.17	Geometrische Überlegungen zum ϵ -Fehler	59
5.18	Geometrische Überlegungen zum δ -Fehler	60
5.19	Korrekturschema für die Winkelfehler γ und ϵ	61
6.1	Auswirkungen der Fehler des I/Q-Demodulators [SL98]	63
6.2	Rohdaten, Beispielmessung	64
6.3	Transformierte Daten, Beispielmessung	65
6.4	π -periodische Rohdaten der Phasenverschiebung, Beispielmessung	65
6.5	2π -periodische Rohdaten der Phasenverschiebung, Beispielmessung	66
6.6	Interpretierte Rohdaten der Phasenverschiebung, Beispielmessung	66
6.7	Zeitlich kontinuierlich fortgesetzte Phasenverschiebung, Beispielmessung	67
6.8	Oszilloskopanzeige, statisches Messverfahren	68
6.9	Datenanpassung, statisches Messverfahren	69
6.10	Rohdaten, Messung 1	70
6.11	Transformierte Daten, Messung 1	70
6.12	Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 1	72
6.13	Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 2	73
6.14	Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 3	74
6.15	Rohdaten, Messung 4	75
6.16	Transformierte Daten, Messung 4	75
6.17	Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 4	76
6.18	Rohdaten, Messung 18	77
6.19	Transformierte Daten, Messung 18	78
6.20	Elliptischer Fit der Rohdaten, Messung 18	78
6.21	Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 18	79
6.22	Rohdaten, Messung 30	81
6.23	Transformierte Daten, Messung 30	82
6.24	Elliptischer Fit der Rohdaten, Messung 30	82
6.25	Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 30	83
6.26	Rohdaten, Messung 32	84
6.27	Transformierte Daten, Messung 32	84
6.28	Elliptischer Fit der Rohdaten, Messung 32	85
6.29	Parabolischer Fit der Phasenverschiebung, Messung 32	86
7.1	Transformiertes Q-Signal, Messung 35	92
7.2	Rohdaten, Messung 35	92

7.3	Verschiedene Fitfunktionen auf der Basis verschieden selektierter Daten, Messung 32	94
7.4	Verschiedene Fitfunktionen auf der Basis verschieden selektierter Daten, Messung 28	95
7.5	Schematischer Aufbau einer Kombination aus Interferometer und Polari- meter [Ser99, S. R95]	98

Tabellenverzeichnis

5.1	Parameter des akusto-optischen Modulators	41
5.2	Parameter des Tiefpassfilters	46
5.3	Parameter der Einzelteile des I/Q-Demodulators	47
6.1	Fitparameter, Messung 1	71
6.2	Fitparameter, Messung 4	76
6.3	Fitparameter, Messung 18	79
6.4	Übersicht über die Ergebnisse der Messungen 5 bis 25	80
6.5	Fitparameter, Messung 30	83
6.6	Fitparameter, Messung 32	85
6.7	Übersicht über die Ergebnisse der Messungen 26 bis 35	87
6.8	Übersicht über die Ergebnisse der Messungen 36 bis 45	88

Literaturverzeichnis

- [AKON10a] T. Akiyama, K. Kawahata, S. Okajima, and K. Nakayama. Conceptual Design of a Dispersion Interferometer Using a Ratio of Modulation Amplitudes. *Plasma and Fusion Research: Regular Articles*, 5:S1041–1 – S1041–5, 2010.
- [AKON10b] T. Akiyama, K. Kawahata, S. Okajima, and K. Nakayama. Improved Resolution and Stability in a Dispersion Interferometer Using a Modulation Amplitude Ratio. *Plasma and Fusion Research: Rapid Communications*, 5:047–1 – 047–3, 2010.
- [AYK⁺13] T. Akiyama, R. Yasuhara, K. Kawahata, S. Okajima, and K. Nakayama. Application of a dispersion interferometer using a ratio of modulation amplitudes to lhd and future prospects. Madison, Wisconsin, September 2013. 16th International Symposium, Laser Aided Plasma Diagnostics. <http://plasma.physics.wisc.edu/conferences/LAPD-2013/presentations/AkiyamaLAPD16.pdf> [Stand: 07.06.2016].
- [Bit10] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [Che84] Francis Chen. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. Plenum Press, New York, 1984.
- [Chr15] Philipp Christ. Untersuchung der Magnetfeldverteilung an einem Plasma-strippe für FAIR. Bachelorarbeit, Universität Frankfurt, 2015.
- [CTUT09] Joon-Young Choi, Nobuhiko Takano, Keiichiro Urabe, and Kunihide Tachibana. Measurement of electron density in atmospheric pressure small-scale plasmas using CO₂-laser heterodyne interferometry. *Plasma Sources Science and Technology*, 18:035013–1 – 035013–8, 2009.
- [Dem06] Demtröder, Wolfgang. *Experimentalphysik 2 - Elektrizität und Optik*. Springer, Berlin, 2006.
- [EE10] Hans-Joachim Eichler and Jürgen Eichler. *Laser - Bauformen, Strahlführung, Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2010.

- [EQ] EQ Photonics, GoochandHousego. *AOMO 3080-120 Datenblatt*.
http://www.eqphotonics.de/cms/cms/upload/datasheets/3080-120_99-48201-11_Rev_F.pdf, [Stand:21.03.2016].
- [Giu10] L. Giudicotti. Interferometry. Folien, European Joint Ph.D Programme on Fusion Science and Engineering Advanced Course on Diagnostics and Data Acquisition, Consorzio RFX, Associazione EURATOM-ENEA sulla Fusione, 2010.
- [Gri05] Hans R. Griem. *Principles of Plasma Spectroscopy*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [Har03] P. Hariharan. *Optical interferometry*. Academic Press, Amsterdam, Boston, 2003.
- [Hec02] Eugene Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, Amsterdam, 2002.
- [HM05] Ekbert Hering and Rolf Martin. *Photonik - Grundlagen, Technologie und Anwendung*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005.
- [Hor91] Heinrich Hora. *Plasmas at High Temperature and Density - Applications and Implications of Laser-Plasma Interaction*. Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [Hut05] I. H. Hutchinson. *Principles of Plasma Diagnostics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [Jac98] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, 1998.
- [Kun09] Hans-Joachim Kunze. *Introduction to Plasma Spectroscopy*. Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [Leh10] Günther Lehner. *Elektromagnetische Feldtheorie - für Ingenieure und Physiker*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2010.
- [Lit04] Gerd Litfin. *Technische Optik in der Praxis*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [Liu05] Jia-ming Liu. *Photonic Devices*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [LM11] Martin Löffler-Mang. *Optische Sensorik - Lasertechnik, Experimente, Light Barriers*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2011.

- [LPLJC88] T. Lehecka, W. A. Peebles, N. C. Luhmann Jr., and T. N. Carlstrom. Two-color interferometry for fusion plasma diagnostics. *Review of Scientific Instruments*, 59(8):1580–1581, 1988.
- [MDB⁺07] V. V. Mirnov, W. X. Ding, D. L. Brower, M. A. Van Zeeland, and T. N. Carlstrom. Finite electron temperature effects on interferometric and polarimetric measurements in fusion plasmas. *Physics of Plasmas*, 14(10):102105–1 – 102105–12, 2007.
- [Mes08] Dieter Meschede. *Optik, Licht und Laser*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2008.
- [Nol11] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 3 - Elektrodynamik*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [PBA⁺14] Guillaume Point, Yohann Brelet, Leonid Arantchouk, Jérôme Carbonnel, Bernard Prade, André Mysyrowicz, and Aurélien Houard. Two-color interferometer for the study of laser filamentation triggered electric discharges in air. *Review of Scientific Instruments*, 85(12):123101–1 – 1231101–10, 2014.
- [PPBS02] F. Pedrotti, L. Pedrotti, W. Bausch, and H. Schmidt. *Optik für Ingenieure - Grundlagen*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [Rei13] Georg A. Reider. *Photonik - Eine Einführung in die Grundlagen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2013.
- [Ser99] Sergio E. Serge. A review of plasma polarimetry - theory and methods. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 41(2):R57–R100, 1999.
- [SL98] S. Sabah and R. Lorenz. Design and calibration of IQ-mixers. In *Particle accelerator. Proceedings, 6th European conference, EPAC'98*, volume 1-3, pages 1589–1591, Stockholm, Sweden, June 22-26 1998.
- [Spa90] Karl-Heinz Spatschek. *Theoretische Plasmaphysik: Eine Einführung*. Vieweg+Teubner Verlag, Stuttgart, 1990.
- [ST91] Bahaa E. A. Saleh and Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics*. Wiley, New York, 1991.
- [Str11] Ulrich Stroth. *Plasmaphysik - Phänomene, Grundlagen, Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2011.

- [Tho15] Thorlabs. *DET10A(/M) Si Biased Detector - User Guide*, 2015.
https://www.thorlabs.de/_sd.cfm?fileName=13052-D02.pdf&partNumber=DET10A/M, [Stand:27.01.2017].
- [TKS⁺86] Hidemi Takahashi, Minoru Kimura, Reiji Sano, Yoshio Nagayama, and Kenro Miyamoto. Heterodyne interferometer of coaxial CO₂ and He–Ne lasers for plasma density measurements. *Review of Scientific Instruments*, 57(7):1286–1289, 1986.
- [TLBJ12] C. Teske, Y. Liu, S. Blaes, and J. Jacoby. Electron density and plasma dynamics of a spherical theta pinch. *AIP, Physics of Plasma*, 19:033505–1 – 033505–12, 2012.
- [Wol16] Andrzej Wolski. PHYS370 - Advanced Electromagnetism, Part 3: Electromagnetic Waves in Conducting Media. Folien, University of Liverpool, 2015/2016.
- [XJX⁺12] G. Xu, J. Jacoby, G. Xiao, G. Loisch, T. Rienecker, K. Weyrich, K. Cistakov, S. Savin, A. Schönlein, O. Rosmey, J. Wiechula, R. Gavrilin, A. Blazevic, M. Iberler, C. Hock, and R. Maeder. Interaction of Ca¹⁰⁺ ion beam with a hydrogen theta-pinch plasma. *GSI Scientific Report*, page 345, 2012.

Danksagungen

Auch wenn diese Arbeit selbstständig verfasst worden ist, haben dennoch viele Personen insofern daran mitgewirkt, dass sie mich bei der Arbeit unterstützt beziehungsweise Rahmenbedingungen geschaffen haben, die mir das Arbeiten erleichtert haben. Daher möchte ich mich bei folgenden Personen bedanken:

- Bei meinem Betreuer **Dr. Marcus Iberler** für sehr viel Zeit, die er für mich und mein Projekt aufgewendet hat. Nicht nur fachliche Diskussionen, sondern auch die bloße Möglichkeit bei Problemen jeglicher Art immer einen Ansprechpartner zu haben, haben mich und mein Projekt enorm vorangebracht. Auch sein freundschaftlicher Umgang mit mir und vielen anderen Mitgliedern, der über ein normales Arbeitsverhältnis hinaus geht, macht die Arbeitsgruppe zu dem, was sie ist.
- Bei **Prof. Dr. Joachim Jacoby** für die Aufnahme in die Arbeitsgruppe, für seine fachliche Hilfe bei Fragen und Problemen, sowie für das Vertrauen in mich, ein durchaus anspruchsvolles Projekt erfolgreich umzusetzen.
- Bei **Astrid Hergt**, nicht nur für ihre zuverlässige und kompetente Hilfe bei administrativen Angelegenheiten, aber auch dafür, dass sie immer ein offenes Ohr für meine persönlichen Probleme gehabt hat.
- Bei meinen Bürokollegen **Konstantin Cistakov** und **Andreas Fedjuschenko** sowohl dafür, dass sie mir durch ihr fachliches Wissen bei verschiedensten Problemen geholfen haben, als auch für die angenehme und freundschaftliche Arbeitsatmosphäre.
- Bei allen weiteren Mitgliedern der **Arbeitsgruppe Plasmaphysik**, die mich bei verschiedensten Gelegenheiten, selbst durch Kleinigkeiten, unterstützt haben.
- Bei meinem langjährigen Freund **Manuel Flach** für das hervorragende Lektorat dieser Arbeit.
- Bei **meinen Eltern** für ihre fortwährende Unterstützung und Hilfe seit der Schulzeit bis zum Ende des Studiums. Ihr eigenes Engagement und die Aufwendung erheblicher finanzieller Mittel hat es erst ermöglicht, dass ich diese nun abgeschlossene Ausbildung in dieser Form genießen durfte.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Sowohl inhaltlich, als auch wörtlich entnommene Inhalte wurden als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in dieser oder vergleichbarer Form noch keinem anderen Prüfungsgremium vorgelegen.

Ort, Datum: _____ Unterschrift: _____

